

Der Treffpunkt Quantenmechanik

—

Überblick und Anleitungen

Prof. Dr. Joachim Stolze
(Technische Universität Dortmund)

Dr. Sebastian Duffe
(Albrecht-Dürer-Gymnasium Hagen)

21. September 2023

Wichtiger Hinweis:

Dies ist die Internetversion des Handbuchs zum *Treffpunkt Quantenmechanik*. Sie enthält nur den Überblicksteil in sechs Kapiteln.

Die detaillierten Anleitungen zu den einzelnen Versuchen im *Treffpunkt Quantenmechanik* können wir aus urheberrechtlichen Gründen nicht im Internet zugänglich machen.

Diese Anleitungen sind gesammelt nur in der gedruckten Version des Handbuchs oder als einzelne Ausdrucke in den Räumen des *Treffpunkts Quantenmechanik* leihweise für Interessierte verfügbar.

Vorwort

Der *Treffpunkt Quantenmechanik* ist ein Praktikumslabor an der Fakultät Physik der Technischen Universität Dortmund, das Schülerinnen und Schülern Einblick in die Grundlagen der modernen Physik bietet. Dazu können dort grundlegende Experimente durchgeführt werden, die die wesentlichen Eigenschaften der Quantenmechanik deutlich machen. Dabei helfen einerseits detaillierte Anleitungen zu den einzelnen Experimenten, verfasst von Dr. Sebastian Duffe, und andererseits ein Überblick über die Hintergründe und die Verbindungen zwischen den verschiedenen verblüffenden Erkenntnissen der Quantenphysik.

Bevor es mit dem Inhaltsverzeichnis und der „Gebrauchsanweisung“ für dieses Buch weitergeht, möchte ich mich bei mehreren Personen und Institutionen bedanken. Prof. Dr. Metin Tolan danke ich für die Anregung zu diesem Projekt, seine Ermunterungen, und für die großartige Zusammenarbeit in vielen Vorlesungen über etliche Jahre. Die Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung hat mich im Rahmen einer Seniorprofessur unterstützt, die Fakultät Physik hat mir auch als Ruheständler Platz und Arbeitsmittel zur Verfügung gestellt. Beiden Einrichtungen bin ich dafür sehr dankbar.

Ich danke meinem alten Schulfreund Dr. Udo Zielinski, Mathematik- und Physiklehrer im Ruhestand, der den gesamten Text wohlwollend, aber unerbittlich kritisch gelesen hat, und das zum Teil mehrmals. Udo, Du bist ein Held!

Mein Dank gilt auch Dr. Marlene Doert und Priv.-Doz. Dr. Dominik Elsässer für ihre Kommentare und Vorschläge zu meinem Text, und natürlich Dr. Sebastian Duffe für die vertrauensvolle und reibungsfreie Zusammenarbeit.

Zuletzt danke ich im Voraus allen Leser:innen für Hinweise auf Fehler und Unklarheiten, die gern per E-Mail an joachim.stolze@tu-dortmund.de geschickt werden können.

Dortmund, im Juni 2023:

Joachim Stolze

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Neugierige Fragen	5
1.1 Ist Quantenphysik wichtig?	5
1.2 Ist Quantenphysik seltsam?	8
1.3 Ist Quantenphysik nur für Genies?	8
1.4 Ist Quantenphysik ein abseitiges Spezialgebiet?	9
1.5 Was ist dann so besonders an der Quantenphysik?	10
2 Welle oder Teilchen, oder was?	13
2.1 Was ist ein Teilchen?	13
2.2 Was ist eine Welle?	16
2.3 Interferenz von klassischen Wellen	19
2.4 Was ist eine Wellenfunktion?	23
2.5 Interferenz und Quantenphysik	31
2.6 Unschärfe und die Folgen	43
3 Ist alles nur Zufall?	57
3.1 Wie bewegt sich ein Teilchen?	57
3.2 Was geschieht bei einer Messung?	77
4 Wie alles anfang: Die Entdeckung der Quanten.	85
4.1 Schwarzkörperstrahlung	86
4.2 Photoeffekt	86
4.3 Millikan-Versuch	88
4.4 Spektroskopie	89
4.5 Detektion einzelner Photonen	90
4.6 Compton-Effekt	91

5 Superposition erklärt (fast) alles.	95
5.1 Vektoren und das Superpositionsprinzip	97
5.2 Noch etwas mehr Mathe für Besserwisser: Komplexe Zahlen	104
6 Spins, Quantencomputer, Katzen und Spione.	115
6.1 Was ist ein Spin?	116
6.2 Magnetische Resonanz	118
6.3 Quantencomputer und Codes	120
6.4 Verschränkung, Katzen und Teleportation	128
A Glossar	141
B Liste der Versuche	153

Gebrauchsanweisung

Was dieses Buch enthält

Dieses Buch besteht aus einer Einführung in die Quantenmechanik in sechs Kapiteln und aus Anleitungen zu den Versuchen im *Treffpunkt Quantenmechanik*. Das Kapitel 1 gibt eine grobe Idee, ob Quantenphysik wichtig, seltsam, nützlich oder gar nichts Besonderes ist.

Wellen und Teilchen bilden den Inhalt von Kapitel 2. Beide Begriffe sind für die Quantenmechanik wichtig und manchmal ist nicht ganz klar, ob etwas eine Welle oder ein Teilchen ist. In verschiedenen Experimenten im *Treffpunkt Quantenmechanik* geht es um diesen Aspekt. Diese Experimente werden beschrieben, ohne aber in die Details des Versuchsaufbaus und der Durchführung zu gehen, denn dafür sind die Versuchsanleitungen im zweiten Teil des Buchs da.

Im Kapitel 3 geht es darum, dass die Quantenmechanik oft nur Aussagen über Wahrscheinlichkeiten machen kann. Um das zu verstehen, muss man sich klarmachen, wie die Quantenmechanik überhaupt die Bewegungen von Teilchen beschreibt, und was genau geschieht, wenn eine Messung durchgeführt wird. Es wird klar, warum ein Atom oder Molekül nur ganz bestimmte („quantisierte“) Energien haben kann, und wie man das in den Experimenten im *Treffpunkt Quantenmechanik* nachvollziehen kann.

Kapitel 4 schildert dann die Experimente, die vor 100 und mehr Jahren die wissenschaftliche Welt verwirrten und dazu führten, dass sich die Quantenmechanik in ihrer heutigen Form entwickelt hat. Die meisten dieser Experimente können auch im *Treffpunkt Quantenmechanik* durchgeführt werden.

Die beiden übrigen Kapitel sind insofern speziell, als sie sich *nicht* auf die Experimente im *Treffpunkt Quantenmechanik* beziehen¹, sondern Material für besonders Interessierte bieten, die es gern etwas genauer wissen möchten (typische Physiker:innen-Eigenschaft!) und mit den grob qualitativen Erklärungen in den anderen Kapiteln nicht ganz zufrieden sind. Es stellt sich heraus, dass für die etwas genauere Untersuchung etwas mathematisches Handwerkszeug nötig ist, das in Kapitel 5 eingeführt wird. Damit ist es dann möglich, besser zu verstehen, wie es zu so merkwürdigen Effekten wie der heisenbergschen Unschärferelation kommt.

Das letzte Kapitel (6) führt eine wichtige zusätzliche Größe ein, den Spin. Warum der in der medizinischen Diagnostik ebenso wie in der Chemie wichtig ist, und was er mit den

¹Mit Ausnahme des Versuchs *Quantenkryptographie* (im Aufbau), der erst im Kapitel 6 sinnvoll besprochen werden kann.

in letzter Zeit diskutierten *Quantencomputern* zu tun hat, wird (hoffentlich) klar werden. Auch das wird nicht ohne die Mathematik aus Kapitel 5 gehen. Zum Schluss wird dann noch von der merkwürdigen Tatsache der quantenmechanischen *Verschränkung* die Rede sein. Dabei wird ein Experiment mit einer Katze besprochen, das zum Glück nie durchgeführt wurde. Außerdem geht es um Teleportation („Beamen“) und um die Physik-Nobelpreise für 2012 und 2022.

Am Ende des Buches finden sich die Liste der Versuche, mit Hinweisen darauf, in welchen Kapiteln sie besprochen werden, ein Glossar von Fachausdrücken, und schließlich die einzelnen Versuchsanleitungen.

Wie man dieses Buch benutzen kann

Es gibt ausgedruckte Exemplare dieses Buches in den Räumen des *Treffpunkts Quantenmechanik* und es ist als PDF-Datei über dessen Homepage zugänglich. Damit gibt es drei verschiedene Möglichkeiten der Lektüre: (i) auf Papier, (ii) online im Browser und (iii) offline nach Download der PDF-Datei auf das eigene Gerät. Die Variante (i) ist zwar auch in Rückenlage auf dem Sofa möglich, aber zunächst einmal muss man ein ausgedrucktes Exemplar in die Hand bekommen (oder selbst eins ausdrucken). Bei (ii) ist gesichert, dass man immer die aktuelle Version anschaut, denn natürlich wird der Text ständig korrigiert und aktualisiert. Trotzdem würde ich persönlich die Variante (iii) empfehlen, denn *so* häufig wird es keine Aktualisierungen und Korrekturen geben.

Die Lektüre am Bildschirm hat den Vorteil, dass man in allen PDF-Anzeigeprogrammen (*Acrobat Reader*, *Foxit* usw.) sehr einfach nach einem Wort suchen kann, wenn man nicht mehr genau weiß, was es bedeutet oder wo man es schon einmal gesehen hat. Auch das Hin- und Herspringen zu im Text erwähnten Abbildungen, anderen Abschnitten usw ist einfach, vorausgesetzt, der Autor hat sich die Mühe gemacht, entsprechende Sprungmarken zu setzen. (Hat er.) Leider ist aber das Hin- und Herspringen besonders bei PDF-Anzeigeprogrammen für Tablets oder Smartphones oft nicht gut implementiert. Meist kann man zwar irgendwo hin springen, aber dann nicht wieder zurück. Das gilt sogar für die Tablet-Versionen von *Acrobat Reader* und *Foxit*, jedenfalls bei meinem Tablet. Auf dem Laptop (jedenfalls auf meinem) funktionieren diese beiden Programme aber einwandfrei. Eine eigene PDF-Datei hat auch den wichtigen Vorteil, dass man Anmerkungen, Unterstreichungen, Notizen usw darin hinterlassen kann.

Die Versuchsanleitungen sind durch Vor- und Rückverweise mit dem Text der Buchkapitel 2-4 verbunden: In den einzelnen Kapiteln werden die Versuche in dem physikalischen Zusammenhang beschrieben, in den sie gehören, und in der Liste der Versuche wird darauf hingewiesen, in welchem Kapitel der jeweilige Versuch auftritt.

Es treten viele Begriffe und Zusammenhänge auf, die nicht jedem Leser zu 100% vertraut sind: *Amplitude*, *Spektrum*, *Impuls* usw. Dafür gibt es ein Glossar (also eine Sammlung von Erklärungen) am Ende des Buches. Für jedes Thema gibt es dort eine Infobox, die auch weiter vorn im Text eingeschoben wird, wo z.B. das Wort *Spektrum* erstmalig auftaucht. Die Infoboxen sind farblich hervorgehoben und können auch mehrfach auftreten, wenn ein Thema wiederholt auftaucht. Wer meint, über das Stichwort in der Überschrift schon genug zu wissen, kann die Box natürlich überspringen. Wer dann etwas später doch unsicher wird, kann die Box immer noch lesen.

Wer dieses Buch lesen kann

Kurze Antwort: jeder! Der Text wurde mit Blick auf interessierte Schüler:innen geschrieben, die Grundkenntnisse der klassischen Physik besitzen und gern etwas mehr über die merkwürdige Welt der Quanten erfahren möchten. Auch wenn immer wieder einmal von den Versuchen im *Treffpunkt Quantenmechanik* die Rede ist, muss man die nicht durchgeführt haben, um etwas von der Lektüre zu haben. Selbstverständlich sind aber auch Lehrer:innen willkommen, die sich über die Möglichkeiten des *Treffpunkts Quantenmechanik* informieren möchten. Für sie, wie für alle anderen gilt: Neugier genügt!

Klassische Physik

Als klassisch bezeichnet man den Wissensstand der Physik etwa um 1900: Die Mechanik gehorcht den von Newton gefundenen Prinzipien, erweitert durch die spezielle Relativitätstheorie von Einstein. Elektrische und magnetische Phänomene werden durch Maxwells Elektrodynamik vollständig beschrieben. Die klassische Physik beschreibt auch heute noch sehr gut alle im Alltag und in weiten Bereichen der Technik auftretenden physikalischen Effekte. Einige wenige Phänomene waren um 1900 durch die klassische Physik *nicht* zu erklären, etwa die Spektrallinien der chemischen Elemente und das Spektrum der Wärmestrahlung. Erst die Entwicklung der Quantenmechanik in den 1920er Jahren lieferte die Theorie dieser „nichtklassischen“ Phänomene.

Wichtiger Hinweis:

Dies ist die Internetversion des Handbuchs zum *Treffpunkt Quantenmechanik*. Sie enthält nur den Überblicksteil in sechs Kapiteln.

Die detaillierten Anleitungen zu den einzelnen Versuchen im *Treffpunkt Quantenmechanik* können wir aus urheberrechtlichen Gründen nicht im Internet zugänglich machen.

Diese Anleitungen sind gesammelt nur in der gedruckten Version des Handbuchs oder als einzelne Ausdrucke in den Räumen des *Treffpunkts Quantenmechanik* leihweise für Interessierte verfügbar.

Kapitel 1

Neugierige Fragen

„Auf sehr kleiner Skala verhalten die Dinge sich wie nichts von dem, was Sie je kennengelernt haben. Sie verhalten sich nicht wie Wellen, sie verhalten sich nicht wie Teilchen, sie verhalten sich nicht wie Wolken oder Billardkugeln oder Gewichte an Federn oder wie irgendetwas, das Sie je gesehen haben.

(.....)

Weil das Verhalten von Atomen sich so sehr von der gewöhnlichen Erfahrung unterscheidet, ist es sehr schwer, sich daran zu gewöhnen und es erscheint jedem sonderbar und rätselhaft – sowohl dem Anfänger als auch dem erfahrenen Physiker. Sogar die Experten verstehen es nicht so gut wie sie gern möchten und das kann man auch nicht anders erwarten, denn bei aller menschlichen Erfahrung und Intuition geht es um große Objekte. Wir wissen wie große Objekte sich verhalten, aber die Dinge auf einer kleinen Skala tun das einfach nicht. Darum müssen wir darüber auf eine abstrakte und fantasievolle Weise lernen und nicht durch Verbindung mit unserer direkten Erfahrung.“

Richard P. Feynman, Nobelpreisträger für Physik 1965

Diese Bemerkungen stehen am Anfang des dritten Teils der „Feynman-Vorlesungen über Physik“. Feynman wollte seine Studenten im zweiten Jahr des Physikstudiums vorsichtig darauf vorbereiten, dass Quantenphysik anders ist als das, was sie bis dahin in ihrem Studium gelernt hatten. Diese Warnhinweise sind inzwischen ungefähr 60 Jahre alt, aber immer noch richtig. Deshalb sollen hier ein paar Fragen gestellt werden, die die Quantenphysik etwas besser einordnen sollen: Erst einmal wollen wir sehen, *worum* es überhaupt geht, bevor wir zu verstehen versuchen, *wie* es geht.

In diesem einführenden Kapitel können wir ein paar neugierige Fragen schnell beantworten. Andere Fragen können wir aber nur kurz anreißen; genauere Erklärungen dazu finden sich dann in den späteren Kapiteln.

1.1 Ist Quantenphysik wichtig?

In den letzten 100 Jahren hat sich unser Lebensstil stärker verändert als in den Jahrtausenden davor; wesentlich dafür waren die Erkenntnisse der Naturwissenschaften und

die Fortschritte der Technik, die sich daraus ergaben. Die **Quantenphysik** ist eine dieser Wissenschaften. Vergleichbar großen Einfluss hatten wohl nur die **Elektrodynamik** (mit universeller Verfügbarkeit von Licht, Energie und Kommunikationsmöglichkeiten) und die **Chemie** (mit Werkstoffen, Arzneimitteln, Kunstdünger usw.). Dabei ist es wichtig, dass die chemischen Vorgänge erst im Rahmen der Quantenphysik wirklich zu verstehen sind.

Ein quantenphysikalisches Gerät, das jeder von uns bei sich hat, ist das **Smartphone**. Das Zeitalter der modernen Elektronik begann 1947 mit der Erfindung des **Transistors**, der ohne Quantenphysik nicht zu verstehen ist. Auf einem Chip, wie er heute nicht nur in jedem Smartphone oder Fernseher, sondern auch in Autos und Waschmaschinen steckt, ist eine riesige Anzahl von Transistoren zusammengefasst („integriert“). Ein heutiges Smartphone enthält mehr Transistoren als ein professioneller Computer vor ein paar Jahren. Auch die **Kamera** Ihres Smartphones nutzt Erkenntnisse der Quantenphysik, ebenso wie die **Photovoltaik-Anlage**, die vielleicht auf dem Dach des Hauses installiert ist, in dem Sie wohnen.

Vor ungefähr 60 Jahren wurde der **Laser** erfunden. Das Wort war ursprünglich eine Abkürzung für „Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation“ und die stimulierte Emission ist ein rein quantenmechanischer Effekt. Anfangs belächelte man den Laser als „eine Lösung auf der Suche nach einem Problem“, aber das änderte sich schnell. Jeder Fußbodenverleger oder Tapezierer misst heute Ihre Wohnung mit einem Lasergerät aus, es gibt Laserpointer anstelle von Zeigestöcken, CD-, DVD- und BluRay-Player enthalten Laser, ebenso wie Laserdrucker. Laser werden verwendet, um Bleche zu zerschneiden, um Augen zu operieren und von Physikern und Chemikern, um Materialien mit Spektroskopie zu untersuchen.

Spektrum (Plural: Spektren), Spektroskopie

Als **Spektrum** bezeichnet man die Gesamtheit der in einem Bereich zu beobachtenden Wellenlängen (oder Frequenzen) der elektromagnetischen Strahlung, zusammen mit ihren jeweiligen Intensitäten. Wenn in einem Bereich alle Wellenlängen auftreten können, bezeichnet man das Spektrum als **kontinuierlich**, z.B. bei der Wärmestrahlung eines heißen Objekts. Wenn nur ganz bestimmte Wellenlängen auftreten können, nennt man das Spektrum **diskret**. Das ist beispielsweise für reine chemische Elemente der Fall. Diskrete Spektren nennt man auch **Linienspektren**, benannt nach dem Bild von farbigen Linien auf dunklem Hintergrund, das sich in einem optischen Spektrometer zeigt. Durch Untersuchung solcher Linienspektren in der **Spektralanalyse** stellt man fest, welche chemischen Elemente die untersuchte Substanz enthält. Die Untersuchung von Spektren nennt man **Spektroskopie**.

Allgemeiner bezeichnet man auch die möglichen Werte der Energie eines Quantensystems als **Energiespektrum**.

Die **GPS-Navigation** über Satelliten beruht auf extrem genauen Atomuhren und benötigt somit Erkenntnisse der Quantenphysik (und übrigens auch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie). Auch die Funktionsweise der energiesparenden **LED-Lampen**, die mittlerweile Standard sind, ist ohne Quantenphysik nicht zu erklären.

Der quantenphysikalische Tunneleffekt, für den es in der klassischen Physik keine Erklärung gibt, ermöglicht die Freisetzung von Energie durch **Kernfusion** in der Sonne (oder auch in einer Wasserstoffbombe), und ist zugleich Grundlage dafür, dass wir mit dem **Rastertunnelmikroskop** die Eigenschaften einzelner Atome auf Oberflächen untersuchen können (dies auch an der TU Dortmund).

Klassische Physik

Als klassisch bezeichnet man den Wissensstand der Physik etwa um 1900: Die Mechanik gehorcht den von Newton gefundenen Prinzipien, erweitert durch die spezielle Relativitätstheorie von Einstein. Elektrische und magnetische Phänomene werden durch Maxwells Elektrodynamik vollständig beschrieben. Die klassische Physik beschreibt auch heute noch sehr gut alle im Alltag und in weiten Bereichen der Technik auftretenden physikalischen Effekte. Einige wenige Phänomene waren um 1900 durch die klassische Physik *nicht* zu erklären, etwa die Spektrallinien der chemischen Elemente und das Spektrum der Wärmestrahlung. Erst die Entwicklung der Quantenmechanik in den 1920er Jahren lieferte die Theorie dieser „nichtklassischen“ Phänomene.

Mit der **Magnetresonanztomographie** (MRT) kann man Dinge sehen, die auf einem Röntgenbild nur schwer zu erkennen sind, z.B. das geschädigte Kreuzband eines Fußballspielers. An Verbesserungen dieser quantenphysikalischen Technik wird auch an der TU Dortmund gearbeitet.

Wenn die **Geckos** bei der nächtlichen Jagd auf Insekten wüssten, dass sie einen Quanteneffekt (van der Waals-Kräfte) nutzen, um an Fensterscheiben oder unter der Zimmerdecke zu laufen, würden sie vermutlich vor Schreck sofort herunterfallen.

Die Erklärung des Spektrums der **Wärmestrahlung** war vor über 100 Jahren der Anlass für Max Planck, die Quanten in die Physik einzuführen. Heute wissen wir durch die Wärmestrahlung aus dem Weltall, dass das Universum eine Temperatur von etwa 2,7 K hat (Brrrr!), und aus ganz geringen Temperaturunterschieden zwischen verschiedenen Richtungen des Himmels lernen wir etwas über die Struktur des frühen Universums. Aus gutem Grund gab die europäische Weltraumagentur ESA dem Satelliten, der die bisher genauesten Messungen dazu machte, den Namen „Planck“.

Eine relativ neue Entwicklung, die noch nicht auf breiter Front in der kommerziellen Technik angekommen ist, betrifft die **Quanteninformationsverarbeitung** und die **Quantencomputer**. Die Grundfrage lautet hier: Welche Information liefert die Quantenmechanik über den Zustand eines Systems, und wie kann man diese Information nutzen, schützen und verarbeiten. Hier gibt es eine Fülle von Möglichkeiten, aber auch große Schwierigkeiten, die überwunden werden müssen, ehe man an breite praktische Anwendung denken kann. Das große Interesse an diesem Gebiet kann man daran erkennen, dass sich neben großen Firmen (Google, IBM, Microsoft,...) auch Staaten (USA, China,...) und Gemeinschaften (EU) mit viel Geld auf diesem Feld engagieren. An der Fakultät Physik der TU Dortmund forschen mehrere Gruppen an den Grundlagen dieser Zukunftstechnologie.

Eine Information, die immer wieder zitiert wird und angeblich aus einem Bericht an das britische Parlament stammt: 25% des Bruttosozialprodukts der hoch entwickelten Gesellschaften beruhen auf Produkten, die Quantenphysik enthalten. Nach dieser Aussage akzeptieren auch Wirtschaftswissenschaftler, dass Quantenphysik wichtig ist.

1.2 Ist Quantenphysik seltsam?

Das ist zum Teil Geschmackssache und hat (wie immer) auch damit zu tun, wie viel man darüber weiß. Je mehr man über eine Sache weiß, desto weniger mystisch kommt sie einem vor. Ungewohnt ist die Quantenphysik schon, aber esoterisch ist sie nicht. Esoteriker nutzen nur die etwas mystischen Vorstellungen, die im Umlauf sind, um ihre Ware zu verkaufen.

Wenn Ihnen jemand „Quantenheilung“ anbietet (gern auch im Internet), seien Sie vorsichtig und überweisen Sie besser kein Geld. Sie finden auch innerhalb von Minuten Bücher, die die Quantenphysik mit Gedankenübertragung, Liebe, Bewusstsein und Schicksal verbinden. Nicht alles davon ist nach wissenschaftlichen Standards gesicherte Erkenntnis, um es vorsichtig auszudrücken.

Andererseits kann man sich durchaus wissenschaftlich ernsthaft mit Verständnis- und Interpretationsproblemen der Quantenphysik beschäftigen. Es ist aber wichtig, dabei an die Bemerkungen von Richard Feynman zu Beginn dieses Kapitels zu denken: Alle unsere Vorstellungen und Begriffe, und die gesamte Sprache, in der wir diskutieren, sind von unseren Erfahrungen im Alltagsleben geprägt. Dass sich in dieser „Alltagsprache“ Fragen formulieren lassen, die die Quantenmechanik nicht eindeutig beantworten kann, muss man hinnehmen; Quantenmechanik ist nun einmal nicht alltäglich. Man muss sich ernsthaft auf die formale (mathematische) Sprache der Quantenphysik einlassen; in *dieser* Sprache lassen sich diejenigen Fragen stellen, die die Quantenmechanik eindeutig beantworten kann.

Kürzer kann man auch sagen, manche Fragen, die man im Alltag ganz selbstverständlich stellen kann, sind einfach nicht erlaubt, wenn es um sehr kleine Dinge geht. Man muss dann oft Zahlen berechnen und vergleichen, um zu sehen, ob die auftretenden Merkwürdigkeiten und Ungenauigkeiten einen wirklich beunruhigen sollten. Es stimmt, dass die Quantenphysik manche Fragen nicht genau beantworten kann, sondern nur Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von Vorgängen machen kann, statt klare und eindeutige Ergebnisse zu liefern; mehr dazu in den späteren Kapiteln. Auch das sollte uns aber im Alltag nicht beunruhigen: Wenn wir abends im Schlafzimmer auf den Lichtschalter drücken, können wir sicher sein, dass das Licht ausgeht.

Verlassen wir aber die Alltagsebene und begeben uns auf die Ebene einzelner Atome oder anderer kleiner Quantensysteme, dann lassen sich immer wieder überraschende, nicht-intuitive Situationen konstruieren. Solche Konstruktionen benutzten auch schon die Begründer der Quantenphysik, wenn sie über ihre Wissenschaft diskutierten, aber immer nur in Form von „Gedankenexperimenten“. Heute ist die experimentelle Technik so weit fortgeschritten, dass man viele der ursprünglichen Gedankenexperimente tatsächlich im Labor durchführen und damit das Verhalten von Quantensystemen im Einzelfall untersuchen kann.

1.3 Ist Quantenphysik nur für Genies?

Kurze Antwort: Nein. Wer Physik studiert, lernt Quantenmechanik an der TU Dortmund im vierten Semester, also im zweiten Jahr des Studiums. An allen anderen Universitäten ist es ähnlich. Die drei Semester „Anlauf“ sind aber auch nötig, denn die in der klassischen Physik entwickelten Denkweisen und Begriffe sind Grundlagen der

Quantenphysik, und es muss vor allem ein mathematischer Formalismus erlernt werden, der sich leider nicht vermeiden lässt, will man die Gesetze der Quantenwelt wirklich präzise formulieren.

1.4 Ist Quantenphysik ein abseitiges Spezialgebiet?

Wenn das so wäre, dann wäre die Quantenphysik sicher keine Pflichtveranstaltung in *sämtlichen* Physik-Studiengängen in Deutschland. Quantenmechanik ist der Schlüssel zum Verständnis aller neueren Entwicklungen in der Physik der Elementarteilchen, der Festkörper und Halbleiter, der Moleküle, Atome und Atomkerne, der Elektronik und der Physik der Sterne und des Weltalls. Durch ihre Ausbildung sind also alle Physiker:innen Quantenphysiker:innen.

Selbst die Tatsache, dass wir und die Welt um uns herum in der Form existieren, die wir kennen, ist nur durch die Quantenmechanik zu verstehen. Ohne die **Unschärferelation** würden nämlich die negativ geladenen Elektronen in die positiv geladenen Atomkerne stürzen und die gesamte Erde wäre ein Klumpen aus ungeheuer dichter Materie mit einem Durchmesser von etwa 400 Metern. Die Stabilität der Materie beruht auf der Quantenphysik.

Unschärferelation

Heisenbergs Unschärferelation, oft auch Unbestimmtheitsrelation oder Unbestimmtheitsbeziehung genannt, sagt aus, mit welcher Genauigkeit Δx der Ort x eines Teilchens bestimmt werden kann, das sich auf der x -Achse bewegt, wenn man im gleichen Zustand auch den Impuls p des Teilchens mit Genauigkeit Δp bestimmt:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Die „Unschärfen“ Δx und Δp hängen also miteinander zusammen: Wenn man x sehr genau bestimmen möchte, wird p sehr ungenau, und umgekehrt.

Nicht nur Ort und Impuls, sondern auch andere Paare von „unverträglichen“ Größen der Quantenmechanik sind durch Unbestimmtheitsbeziehungen verknüpft.

\hbar (lies: „h-quer“) ist die durch 2π dividierte Planck-Konstante;

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}.$$

Da diese Zahl so winzig ist, bemerken wir von der Unschärferelation im täglichen Leben nichts; die Atome spüren sie aber sehr deutlich.

Impuls

Der Impuls p eines klassischen Teilchens ist einfach das Produkt aus Masse

m und Geschwindigkeit v :

$$p = mv.$$

Der Impuls eines kräftefreien quantenmechanischen Teilchens hängt mit der Wellenlänge λ der Wellenfunktion zusammen:

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

dabei ist h die Planck-Konstante.

Wenn Kräfte auf das quantenmechanische Teilchen wirken, ist p etwas komplizierter zu berechnen.

Auch ein Photon (Lichtquant) hat Impuls; der ist durch die Wellenlänge λ des Lichts gegeben:

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Der Impuls des Photons hängt mit dessen Energie E über

$$p = \frac{E}{c}$$

zusammen. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

Zustand eines Teilchens

Der Zustand eines klassischen Teilchens, das sich in x -Richtung bewegt, ist zur Zeit t festgelegt durch den Ort x und den Impuls p (oder auch die Geschwindigkeit v). Die Werte von x und p sind in jedem Augenblick genau bestimmt.

Der Zustand eines quantenmechanischen Teilchens ist dagegen festgelegt durch eine Funktion, die von x und t abhängt, die **Wellenfunktion**. Die Wellenfunktion erlaubt Aussagen über Ort und Impuls des Teilchens, aber nur im Rahmen der heisenbergschen Unschärferelation.

Eine andere Möglichkeit, einen quantenmechanischen Zustand mathematisch darzustellen, sind Vektoren. Mehr darüber findet sich im Abschnitt 5.1.

1.5 Was ist dann so besonders an der Quantenphysik?

Das ist genau das Thema der nächsten Kapitel und der Experimente, die Sie im *Treffpunkt Quantenmechanik* selbst erleben können; hier wollen wir nur einige Stichworte angeben, zusammen mit den Experimenten, für die diese Stichworte wichtig sind.

Wellen können sich überlagern. Das ist die Grundlage für **Interferenz** und **Beugung**. Das hat zunächst einmal nichts mit Quantenphysik zu tun, sondern war schon in der klassischen Physik lange bekannt. Licht ist ein Wellenvorgang. (Versuche: *Wellenwanne*, *Beugung von Laserlicht*, *Polarisation des Lichtes*) In der Quantenphysik tauchen

aber Wellen an Stellen auf, wo man eigentlich Teilchen erwartet. Die Tatsache, dass sich diese Wellen überlagern und miteinander interferieren können, ist die Ursache für viele der überraschenden Effekte in der Quantenphysik. Deshalb lohnt es sich, die Eigenschaften von Wellen genauer anzuschauen, besonders Interferenz und Beugung, auch wenn das einigen Aufwand erfordert, wie wir in Kapitel 2 sehen werden.

Elektronen verhalten sich in manchen Situationen wie **Wellen**. (Versuch: *Elektronenbeugung*) Manchmal verhalten sie sich aber auch wie Teilchen, beispielsweise haben alle Elektronen die gleiche Ladung $-e$. Die Ladung jedes Gegenstands ist quantisiert, besteht also aus lauter gleichen kleinsten Einheiten, und die Einheit der Ladung ist die Elementarladung e . (Versuch: *Millikan-Versuch*)

Licht verhält sich manchmal wie ein Strom von **Teilchen** (Photonen). (Versuch: *Dektion einzelner Photonen*) Wenn aber sehr viele Photonen beobachtet werden, ergibt sich insgesamt wieder das Verhalten von Wellen. (Versuch: *Doppelspalt mit einzelnen Photonen*)

Die **Energie von Atomen** ist quantisiert, es sind also nur bestimmte Werte der Energie zulässig. Diese Energiewerte identifizieren unterschiedliche Atome wie ein Fingerabdruck. (Versuche: *Franck-Hertz-Versuch, Spektroskopie*)

Die **Energie des Lichts** ist quantisiert und die zulässigen Werte der Energie hängen von der Lichtwellenlänge ab. (Versuche: *Photoeffekt, Schwarzkörperstrahlung*)

Das Ergebnis einer **Messung** kann zufällig sein, auch wenn sich das gemessene System in einem ganz bestimmten eindeutig festgelegten Zustand befindet. Das Ergebnis einer *einzelnen* Messung kann die Quantenmechanik in der Regel nicht berechnen. Sehr *vielen* Messungen an identischen Systemen im gleichen Zustand liefern eine bestimmte Verteilung der möglichen Messwerte; diese Verteilung kann die Quantenmechanik berechnen. Eine Messung beeinflusst das System: Der Zustand nach einer Messung ist anders als vorher und er hängt vom Ergebnis der Messung ab. (Versuche: *Quantenkryptographie (im Aufbau), Polarisation des Lichts*)

Kapitel 2

Welle oder Teilchen, oder was?

In diesem Kapitel machen wir uns als Erstes in Abschnitt 2.1 klar, was die wesentlichen Eigenschaften eines Teilchens in der klassischen Physik sind. In Abschnitt 2.2 tun wir das Gleiche für klassische Wellen. Dabei wird zum ersten Mal von **Unschärfe** die Rede sein, aber zunächst nur in eher unscharfer Form. Wellen können gebeugt werden, und wenn mehrere Wellen gleichzeitig vorhanden sind, können sie miteinander interferieren. Was das bedeutet und welche Folgen es hat, sehen wir im Abschnitt 2.3. Die Phänomene von Interferenz und Beugung können im *Treffpunkt Quantenmechanik* ganz anschaulich und mit bloßem Auge in den Experimenten mit der *Wellenwanne* beobachtet werden. Das Experiment *Beugung von Laserlicht* zeigt die gleichen Phänomene bei einer sehr viel kürzeren Wellenlänge. Der Abschnitt 2.4 erklärt dann, wie die Wellen als **Wellenfunktionen** in der Quantenphysik ins Spiel kommen. Diese können ebenfalls Interferenz und Beugung zeigen, genauso wie andere Wellen, und das ist die Ursache für viele der „merkwürdigen“ Eigenschaften der Quantenphysik. Der Abschnitt 2.5 erklärt die Details und der Versuch *Elektronenbeugung* liefert ein Beispiel für Beugung von Wellen in der Quantenphysik. Im Abschnitt 2.6 sehen wir genauer, was Unschärfe mit Wellen zu tun hat und erkennen, dass sie keineswegs nur lästig ist, sondern sogar fundamental wichtig für das Verständnis der Materie, die uns umgibt.

2.1 Was ist ein Teilchen?

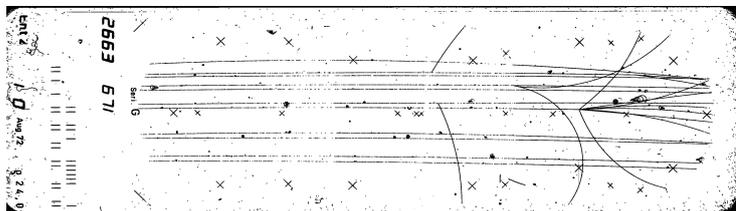


Abbildung 2.1: Spuren von Elementarteilchen in einer Blasen-kammer. Bild von 1972; Blasen-kammern sind heute technisch überholt und werden nicht mehr verwendet. (Foto: CERN)

Ein Teilchen ist ein kleines Objekt mit einer bestimmten Masse. Es ist so klein, dass man es sich als punktförmig vorstellen kann; oft spricht man auch von einem „Massepunkt“. Es bewegt sich auf einer Bahn durch den Raum und hat zu jedem Zeitpunkt

einen bestimmten Ort und eine bestimmte Geschwindigkeit bzw. einen bestimmten Impuls (Produkt aus Masse und Geschwindigkeit). In der klassischen Physik können auch sehr große Objekte als Teilchen behandelt werden, z.B. die Erde bei der Berechnung ihrer Bahn um die Sonne, denn verglichen mit dem Abstand zur Sonne ist die Erde sehr klein. Wir meinen aber im Zusammenhang mit der Quantenphysik immer Atome oder deren Bestandteile, wenn wir von Teilchen sprechen.

Die Elementarteilchen, aus denen sich die Materie zusammensetzt, haben häufig auch eine elektrische Ladung; weitere Eigenschaften, wie etwa Farbe oder Geruch haben diese Teilchen nicht. Da es punktförmig ist, kann ein Teilchen auch nicht „um seine Achse“ rotieren. In der Quantenphysik haben allerdings manche Teilchen einen „Spin“, eine Größe, die Eigenschaften einer Rotation widerspiegelt; wir kommen später noch einmal darauf zurück.

Wenn keine Kraft auf ein Teilchen wirkt (wenn es „kräftefrei“ ist), bewegt es sich in gerader Linie mit der Geschwindigkeit weiter, die es am Anfang hatte. Hatte es am Anfang keine Geschwindigkeit, bleibt es einfach am gleichen Ort. Wenn eine Kraft wirkt, ändert sich die Geschwindigkeit des Teilchens, und damit auch sein Impuls. Eines der von Isaac Newton gefundenen Gesetze der Bewegung lautet: Die zeitliche Änderung des Impulses eines Teilchens ist gleich der wirkenden Kraft. Dieses Gesetz macht im Rahmen der klassischen Physik die Berechnung von Bewegungen möglich, vom Wurf eines Steins bis zur Bahn eines Satelliten und der Bewegung der Planeten.

Für unsere Überlegungen wollen wir es uns möglichst einfach machen. Deshalb betrachten wir nur Bewegungen in einer Dimension. Unser Teilchen bewegt sich also entlang einer geraden Linie, der x -Achse. Wir legen einen Nullpunkt $x = 0$ auf der Linie fest und die Zahl x sagt uns dann, wo das Teilchen gerade ist.

Wenn das Teilchen am Anfang ruht und eine Kraft in die positive x -Richtung („nach rechts“) wirkt, dann nimmt die Geschwindigkeit des Teilchens zu, und damit auch seine Bewegungsenergie (kinetische Energie). Wirkt die Kraft nach links, dann bekommt das Teilchen eine negative Geschwindigkeit („Rückwärtsgang“), aber die kinetische Energie nimmt auch zu, denn sie hängt ja nicht vom Vorzeichen (Richtung) der Geschwindigkeit ab.

Kinetische und potentielle Energie, klassisch

Kinetische Energie ist die Energie der Bewegung. Wenn ein Teilchen der Masse m sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat es die Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Wenn das Teilchen seine Energie beispielsweise an eine Feder abgibt, die durch den Aufprall gespannt wird, dann ist die Energie als potentielle Energie E_{pot} in der Feder gespeichert. Die Gesamtenergie, also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, ist konstant. Dieser Satz von der Erhaltung der Energie (auch kurz: Energiesatz) ist eines der wichtigsten Prinzipien der Physik.

Häufig hängt E_{pot} von einer Ortskoordinate x ab, in unserem Beispiel etwa von dem Ort, an dem das Teilchen von der Feder gestoppt wird. Je schneller es am Anfang war, desto weiter wird die Feder zusammengedrückt und desto

größer ist die potentielle Energie. In der Physik bezeichnet man eine solche vom Ort x abhängige potentielle Energie meist kurz mit $V(x)$ und spricht auch abkürzend vom Potential. (Eine etwas missverständliche Bezeichnung, da man in der Elektrizitätslehre die potentielle Energie *pro Ladung* als elektrisches Potential bezeichnet.)

Die kinetische Energie wird häufig durch den Impuls $p = mv$ ausgedrückt; dann hat man die Beziehung

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}.$$

Diese Beziehung gilt allerdings nur, wenn das Teilchen sich mit Geschwindigkeiten bewegt, die sehr klein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit c sind. Ist das nicht der Fall, muss man die Relativitätstheorie bemühen und erhält

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2.$$

In diesem Buch wird die Relativitätstheorie aber nur an einer einzigen Stelle wichtig, und zwar beim Compton-Effekt.

Wenn wir Reibungskräfte ausklammern, gibt es außer der kinetischen Energie nur noch eine weitere Energieform, die potentielle Energie, manchmal auch Lageenergie genannt. Wir können uns etwa zwei elektrisch gleich geladene Teilchen vorstellen, von denen eins an der Stelle $x = 0$ fest liegt und das andere sich auf diese Stelle zu bewegt. Da die elektrische Abstoßung das bewegte Teilchen abbremst, nimmt dessen kinetische Energie ab. Irgendwann wird die kinetische Energie Null sein. (Denken Sie daran, dass die elektrische Abstoßung unendlich groß werden kann, wenn der Abstand zwischen den beiden Teilchen immer kleiner wird!) Die gesamte kinetische Energie ist umgewandelt worden in potentielle Energie. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie besagt für unseren einfachen Fall, dass die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant bleibt. Die Erhaltung der Energie ist eines der wichtigsten Prinzipien der Physik.

Was geschieht als nächstes mit den beiden geladenen Teilchen? Es wirkt nach wie vor die elektrische Abstoßungskraft, und die stößt das bewegliche Teilchen zurück in die Richtung, aus der es gekommen ist. Der Impuls des Teilchens ändert sich nach dem Newtonschen Gesetz, und seine kinetische Energie nimmt wieder zu; dafür nimmt die potentielle Energie ab. Jede eindimensionale Bewegung lässt sich vollständig (und mathematisch einfach) mit dem Gesetz der Energieerhaltung berechnen.

Wenn man ein fest vorgegebenes Kraftfeld hat, also an jedem Ort x eine bestimmte zeitlich konstante Kraft auf das bewegliche Teilchen wirkt (so wie in unserem Beispiel), dann kann man statt der Kraft am Ort x auch die potentielle Energie angeben, die das bewegliche Teilchen hat, wenn es am Ort x ist; diese potentielle Energie nennen wir $V(x)$. Häufig spricht man auch kurz und einfach vom Potential. (Das ist üblich, aber eigentlich etwas ungenau.)

Wir halten fest: Ein Teilchen bewegt sich auf einer Bahn, die ausschließlich von den wirkenden Kräften bestimmt wird. Alle Eigenschaften eines Teilchens sind in einem sehr kleinen Raumbereich konzentriert. Das gilt insbesondere für seine Energie, ganz anders als bei der Energie einer Welle.

2.2 Was ist eine Welle?



Abbildung 2.2: Wellen in der Brandung und idealisierte „Physikerwelle“. (Foto und Grafik: Stolze)

Wellen auf einer Wasseroberfläche hat jeder schon einmal gesehen. Meist sehen die viel unordentlicher aus als die perfekten Wellen, mit denen sich die Physik gern befasst. Wichtiger als die Wasserwellen sind die Wellen, mit denen wir täglich umgehen: elektromagnetische Wellen, die unsere Smartphones senden und empfangen, Lichtwellen, die unsere Wohnungen beleuchten, Schallwellen aus unseren Lautsprechern usw. Die sind meist eher so ordentlich wie das rechte Bild in Abb. 2.2, aber leider kann man sie nicht so gut sehen wie Wasserwellen.

Wir machen uns das Leben wieder einfach und betrachten zunächst einmal Wellen, die sich in einer Dimension bewegen, so wie die einfache Welle rechts in der Abbildung 2.2. Eine solche Welle lässt sich durch wenige Größen beschreiben. Die **Wellenlänge** λ (griechischer Buchstabe: lambda) ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen (oder -tälern, natürlich). Die **Auslenkung** zeigt an, um wieviel die Welle z.B. von der absolut ruhigen Wasseroberfläche abweicht; sie kann positiv oder negativ sein und ändert sich räumlich und zeitlich. Als **Amplitude** bezeichnet man die maximale Auslenkung, also die Höhe des Wellenbergs über dem Niveau der ruhigen Wasseroberfläche.

Wellen bewegen sich; stellen Sie sich beispielsweise vor, dass sich das Wellenmuster in Abbildung 2.2 (rechts) mit einer konstanten Geschwindigkeit nach rechts bewegt. Dann kommen in regelmäßigen Zeitabständen an einer festen Stelle abwechselnd Wellenberge und Wellentäler vorbei. Die Zeit zwischen zwei Wellenbergen nennt man die **Periode** T der Welle, und $\frac{1}{T} = f$ heißt **Frequenz** der Welle. Die Frequenz ist gerade die Anzahl von Wellenbergen, die pro Sekunde an einer festen Stelle vorbeilaufen. Dann ist $v = \lambda f$ die Geschwindigkeit mit der die Welle sich bewegt. Die Auslenkung einer Welle ist für einen festen Zeitpunkt (als „Momentaufnahme“) periodisch im Raum. Das räumliche Muster wiederholt sich nach einer Wellenlänge λ exakt. An einem festen Ort ist die Auslenkung einer Welle periodisch in der Zeit. Das zeitliche Verhalten wiederholt sich nach einer Periode T exakt.

Hier sieht man schon, dass es ideale Wellen in der wirklichen Welt eigentlich nicht geben kann, denn etwas, das sich räumlich und zeitlich immer wiederholt, muss im Raum unendlich ausgedehnt sein und in der Zeit unendlich lange andauern. In dieser scheinbar sehr spitzfindigen Feststellung liegt die Ursache der berühmt-berüchtigten Unschärferelation. Darauf kommen wir noch zurück.

Wellen enthalten und transportieren Energie. Das sieht man z.B. daran, dass Wasserwellen Schiffe bewegen und Uferbefestigungen zerstören können. Auch, dass der Akku

Ihres Smartphones eher leer ist als Sie möchten, liegt zumindest zum Teil an den Wellen, die es ins Mobilfunknetz sendet (möglicherweise aber auch an der Musik, die Sie hören oder an den Spielen, mit denen Sie sich die Zeit vertreiben). Die Energie einer Welle ist über größere Raumbereiche verteilt, ganz im Gegensatz zur scharf lokalisierten Energie eines Teilchens.



Abbildung 2.3: Kleine Wellen auf einer ruhigen Wasseroberfläche. (Foto: Stolze)

In der Abbildung 2.3 sehen Sie Wellen auf einer Wasseroberfläche, also in zwei Dimensionen, die einigermaßen regelmäßig, aber nicht völlig „ordentlich“ sind. Die Wellenberge und Wellentäler haben in etwa gleiche Abstände. Sie sind ungefähr gerade, aber nicht ganz, und sie enden irgendwo. Die vereinfachte Version, die man in der Physik betrachtet, hat *genau* gleiche Abstände zwischen den *perfekt geraden* Wellenbergen, die *unendlich weit* ausgedehnt sind. Ein solches Gebilde wird als *ebene Welle* bezeichnet, weil die Wellenberge in drei Dimensionen auf Ebenen bzw. in zwei Dimensionen auf Geraden liegen.



Abbildung 2.4: Fast ideale ebene Wasserwellen. Aufgrund der Kameraperspektive erscheint die Wellenlänge links im Bild kürzer als rechts. (Foto: Stolze)

Die Wasserwellen in Abbildung 2.4 sind schon ziemlich nah am Idealfall der ebenen Welle. Bei genauem Hinschauen sieht man aber, dass hier nicht nur eine Sorte von Wellen im Spiel ist. In einigen Bereichen des Bilds sieht man andeutungsweise noch Wellen mit einer anderen Wellenlänge, deren Wellenberge in einer anderen Richtung verlaufen. Das ist ein Beispiel dafür, dass Wellen sich ungestört überlagern können. Nach dem lateinischen Wort für Überlagerung spricht man in der Physik gern vom **Superpositionsprinzip**. Das klingt gleich viel wissenschaftlicher, diese Tatsache ist aber auch extrem wichtig. Wenn Wellen sich nämlich gegenseitig beeinflussen könnten, wäre zum Beispiel zuverlässige GPS-Navigation nicht möglich, weil sich zur gleichen Zeit neben den Signalen der GPS-Satelliten auch die Wellen von Mobilfunk, Wetterradar und Tausenden von Fernsehprogrammen durch den Raum bewegen. Ein Beispiel

für ungestörte¹ Überlagerung von Wasserwellen sieht man in Abbildung 2.5: Die Bugwelle des Motorboots läuft über die Wasseroberfläche, ohne die anderen Wellen zu beeinflussen. Die Überlagerung von Wellen führt zum Phänomen der **Interferenz**, auf das wir im Abschnitt 2.3 zurück kommen werden.



Abbildung 2.5: Überlagerung verschiedener Wasserwellen. (Foto: Stolze)

Wir kommen noch einmal kurz auf den Begriff der Wellenlänge und die Messung von Wellenlängen. Bei einer Welle wie der in Abbildung 2.6 ist die Wellenlänge einfach zu messen: Da die Welle so regelmäßig ist, können Sie einfach den Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen messen. Noch etwas genauer ist es, den Abstand zwischen zwei weit entfernten Wellenbergen auszumessen und durch die Anzahl der dazwischen liegenden Täler zu dividieren. Dagegen ist es schwierig, die Frage nach dem „Ort der Welle“ zu beantworten. Die Welle ist offensichtlich „überall“ in der Abbildung und die Frage nach dem Ort ist eigentlich sinnlos.

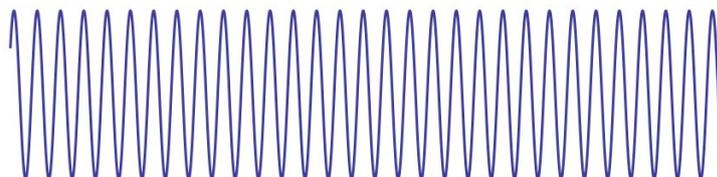


Abbildung 2.6: Welle mit gut zu messender Wellenlänge. (Grafik: Stolze)

Ganz anders ist das bei einer Welle wie der in Abbildung 2.7: Hier kann man schon sagen, wo (ungefähr) die Welle ist. Dagegen wird es schwierig, eine genaue Wellenlänge zu ermitteln: Wo fängt dieser Wellenzug an, wo hört er auf, wie lang ist er also? Und welche Maxima oder Minima soll man als Wellenberge oder Wellentäler zählen; nur die großen oder auch die ganz kleinen?

Für die eine Art von Wellen ist also die Wellenlänge „scharf“ (genau bekannt) und der Ort „unscharf“ und für die andere Art ist es genau umgekehrt. Mit den Methoden der Mathematik kann man nachweisen, dass eine solche Beziehung allgemein gültig ist und nicht nur für unser spezielles Beispiel gilt. Da in der Quantenmechanik die Wellenlänge der Wellenfunktion mit dem Impuls verknüpft ist (Näheres dazu in Abschnitt 2.4), gibt es die Unschärferelation zwischen Ort und Impuls. Die oben skizzierte Unschärfebeziehung für „ganz normale“ Wellen, z.B. Radiowellen, ist für Nachrichtentechniker völlig selbstverständlich. Wenn Sie ein besonders kurzes Signal übertragen

¹ Elektromagnetische Wellen im freien Raum überlagern sich völlig ungestört; bei Wasserwellen gilt das nur näherungsweise.

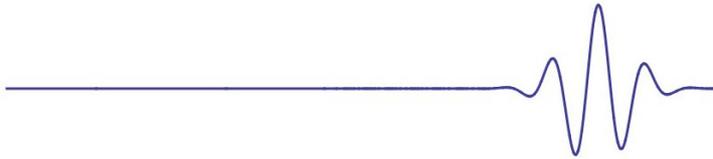


Abbildung 2.7: Welle mit gut zu messendem Ort. (Grafik: Stolze)

wollen, können Sie das nicht mit einer einzigen Wellenlänge tun, sondern benötigen viele Wellenlängen (oder Frequenzen), also eine „große Bandbreite“, wie Fachleute sagen.

Die Tatsache, dass Ort und Wellenlänge (oder Zeitpunkt und Frequenz) in einer Unschärfebeziehung zu einander stehen, ist weder ungewöhnlich noch überraschend. Was an der Quantenmechanik ungewöhnlich ist (und zunächst sehr überraschend war), ist die Tatsache, dass Wellen die Eigenschaften von Teilchen beschreiben können und dass die Wellenlänge etwas mit dem Impuls zu tun hat. Mehr zur Unschärfe, zur Unschärfebeziehung und zu den Folgen findet sich im Abschnitt 2.6.

Bevor wir dazu kommen, müssen wir aber näher auf die Bedeutung der Interferenz eingehen. Da Interferenz für die Quantenmechanik so charakteristisch und wichtig ist, werden wir dafür mehrere Abschnitte benötigen, in denen die nicht ganz einfachen Details nach und nach erklärt werden. Hier ist also Durchhaltevermögen gefragt; es hat schon Gründe, warum auch in einem Physikstudium drei Semester vergehen, bevor es mit der Quantenphysik ernsthaft losgeht.

2.3 Interferenz von klassischen Wellen

Interferenz in einer Dimension

Wir haben schon gesehen, dass mehrere Wellen sich überlagern können. Man spricht dann auch davon, dass diese Wellen miteinander **interferieren** bzw. dass **Interferenz** vorliegt. Am einfachsten ist die Situation wieder in einer Dimension, und wenn die beteiligten Wellen gleiche Wellenlängen haben. Dann kommt es nur noch darauf an, wie die Wellen relativ zu einander liegen. Wenn die Wellenberge der einen Welle genau mit den Wellenbergen der zweiten Welle zusammentreffen, dann verstärken sich die Wellen; man spricht dann von **konstruktiver Interferenz**. Das ist in der Abbildung 2.8 dargestellt.

In der Abbildung 2.9 ist der entgegengesetzte Fall dargestellt: Die Wellenberge der ersten Welle fallen genau mit den Wellentälern der zweiten Welle zusammen und die beiden Wellen löschen sich gegenseitig aus; das nennt man **destruktive Interferenz**.

Natürlich können auch alle Zwischensituationen auftreten, wenn die Verschiebung zwischen den Wellenbergen beider Wellen einen Wert zwischen Null (konstruktive Interferenz) und einer halben Wellenlänge (destruktive Interferenz) beträgt.

Wenn Wellen *unterschiedlicher* Wellenlänge miteinander interferieren, wird die Situation komplizierter (Abbildung 2.10); solche Situationen müssen wir aber nicht betrachten.

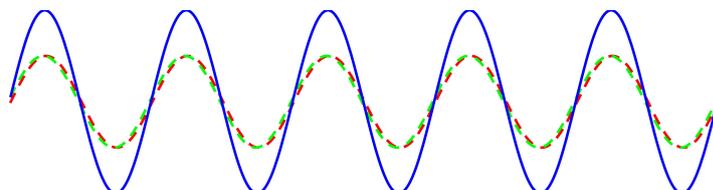


Abbildung 2.8: Zwei Wellen (grün und rot, gestrichelt) interferieren konstruktiv und bilden die blaue, durchgezogene gezeichnete Welle. Die beiden gestrichelten Wellen sind in der Zeichnung leicht gegeneinander verschoben dargestellt, damit sie zu unterscheiden sind. (Grafik: Stolze)

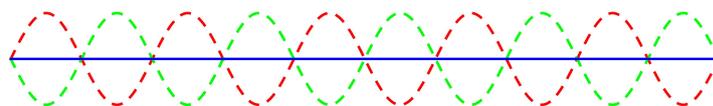


Abbildung 2.9: Zwei Wellen (grün und rot, gestrichelt) interferieren destruktiv und bilden die blaue, durchgezogene gezeichnete „Welle“; sie löschen sich also vollständig aus. (Grafik: Stolze)

Interferenz in zwei Dimensionen und Beugung

Wir betrachten nun eine kompliziertere Situation: die Interferenz zwischen den Wellen von zwei Sendern in *zwei* Dimensionen. Diese Situation wird auch im Experiment *Wellenwanne* untersucht und ist in Abbildung 2.11 dargestellt. Die beiden Sender S_1 und S_2 (man spricht oft auch von Quellen) erzeugen im gleichen Takt („gleichphasig“) Wellen, deren Überlagerung an den Punkten A und B beobachtet wird. Der Punkt A ist von den beiden Quellen genau gleich weit entfernt, so dass die Wellenberge von S_1 und S_2 dort genau gleichzeitig eintreffen. Es liegt also konstruktive Interferenz vor und bei A bilden sich Wellen mit besonders großer Amplitude.

Bei B sieht das ganz anders aus. Da die Quelle S_2 weiter von B entfernt ist als S_1 , haben die Wellen von den beiden Quellen einen unterschiedlich langen Weg zurückzulegen; man spricht von einem **Gangunterschied**. Beträgt der Gangunterschied gerade eine halbe Wellenlänge, dann treffen die Wellenberge von der einen Quelle genau mit den Wellentälern von der anderen Quelle zusammen und es entsteht destruktive Interferenz. Beträgt er aber eine ganze Wellenlänge (oder genau zwei Wellenlängen, oder drei usw.), dann treffen Wellenberge auf Wellenberge und es gibt konstruktive Interferenz. Zwischen diesen Stellen, bei einem Gangunterschied von 1,5 (oder 2,5 oder 3,5 usw.) Wellenlängen, gibt es wieder destruktive Interferenz. Wenn man also in Gedanken den Beobachtungspunkt B allmählich von A wegschiebt, wird man abwechselnd konstruktive und destruktive Interferenz beobachten, also maximale und minimale Amplitude des entstehenden Wellenmusters. Der Abstand zwischen diesen Extremwerten der Amplitude wird kleiner, wenn die Sender (Quellen) Wellen mit einer kürzeren Wellenlänge aussenden, denn dann braucht es ja nur einen kürzeren Abstand zwischen A und B um einen Gangunterschied von $\lambda/2$ (halbe Wellenlänge) zu erreichen. Ähnlich ist es, wenn man den Abstand zwischen den beiden Quellen vergrößert; auch dann verändert sich der Gangunterschied schneller. Das macht man sich am einfachsten klar, indem man sich die entgegengesetzte Extremsituation vorstellt: Wenn man die Entfernung zwischen S_1 und S_2 so weit *verkleinert*, dass sie weniger als $\lambda/2$ beträgt, kann man den Punkt B verschieben soviel man will; man wird nirgendwo einen Gangunterschied von

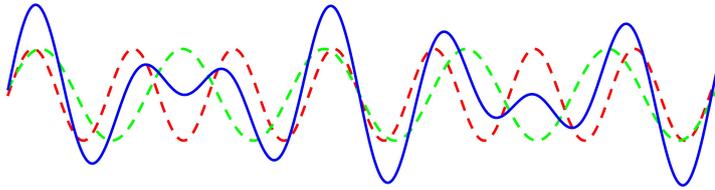


Abbildung 2.10: Zwei Wellen (grün und rot, gestrichelt) mit unterschiedlichen Wellenlängen (im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$) interferieren und bilden die blaue, durchgezogene gezeichnete komplizierte Welle. (Grafik: Stolze)

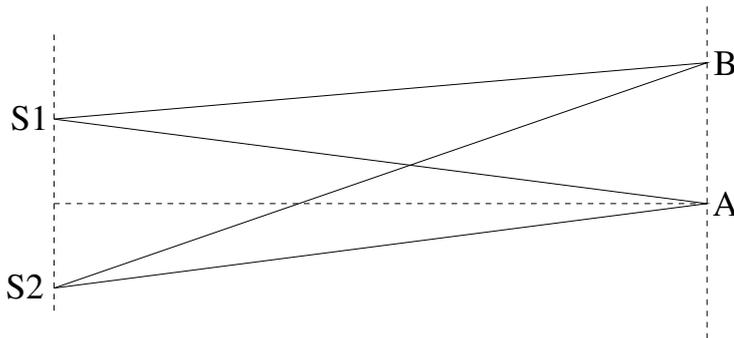


Abbildung 2.11: Zur Interferenz zwischen den Wellen von zwei Sendern. (Grafik: Stolze)

$\lambda/2$ erreichen. Die Stelle, wo zum ersten Mal destruktive Interferenz auftritt, ist ins Unendliche gewandert.

Wenn Sie an der Wellenwanne mit einer oder zwei Quellen experimentieren (oder wenn Sie einfach einen Stein ins Wasser werfen), sehen Sie, dass die Wellen sich kreisförmig auf der Wasseroberfläche ausbreiten. Die Wellen, die Ihr Smartphone aussendet, breiten sich kugelförmig im Raum aus. (Wenn sie das nicht täten, müssten Sie das Gerät immer so ausrichten, dass die nächste Mobilfunkstation Ihr Signal empfängt; das wäre ziemlich lästig.) Wie aber kommt man von diesen Kreiswellen oder Kugelwellen zu den gleichmäßigen ebenen Wellen, die man z.B. in Abbildung 2.4 sieht, und wie breiten sich solche Wellen aus? Diese Frage klärt das **Huygens'sche Prinzip**: Von jedem Punkt einer Wellenfront gehen kreisförmig (bzw. kugelförmig, je nach Dimension) Elementarwellen aus, und deren Überlagerung bildet die neue Wellenfront im nächsten Moment. Wenn die ursprüngliche Wellenfront eine Gerade (bzw. Ebene, je nach Dimension) war, dann ist auch die neue Wellenfront eine Gerade, vorausgesetzt, die Ausbreitung der Welle wird nicht durch Hindernisse beeinflusst.

Wenn man ebene Wellen gegen ein Hindernis laufen lässt, etwa in der Wellenwanne einen „Wellenbrecher“ aufstellt, dann sieht man, dass die Wasseroberfläche hinter dem Wellenbrecher nicht etwa völlig ruhig bleibt, sondern dass die Wellenfronten sich nahe dem Ende des Wellenbrechers biegen, so dass die Wellen „um die Ecke“ laufen. Das liegt an den Huygens'schen Elementarwellen die nahe dem Ende des Wellenbrechers entstehen und die keine „Partnerwellen“ mehr haben, mit denen zusammen sie wieder eine ebene Welle bilden können. Wenn man zwei Wellenbrecher mit einem schmalen Spalt dazwischen aufstellt, dann kommen nur noch ganz wenige Elementarwellen durch, und das Wellenmuster hinter dem Hindernis entspricht einer einzelnen kreisrunden Elementarwelle. Das ist dann der Fall, wenn die Breite des Spalts etwa so groß ist

wie die Wellenlänge.

Wenn man die Ausbreitung von ebenen Wellen fast völlig ausbremst, durch einen Wellenbrecher, der nur zwei schmale Spalte lässt (einen **Doppelspalt**), dann hat man genau die Situation aus Abbildung 2.11. Die beiden Spalte sind zwei Quellen, von denen Wellen mit gleicher Phase ausgehen (Wellenberge starten genau gleichzeitig). Man kann dann im Experiment *Wellenwanne* die Interferenz zwischen zwei Quellen überprüfen, die anhand von Abbildung 2.11 theoretisch diskutiert wurde.

All diese Phänomene kann man nicht nur bei Wasserwellen beobachten, sondern auch bei Lichtwellen. Dass für Wellen sehr unterschiedlicher Art (mechanisch und elektromagnetisch) und sehr unterschiedlicher Wellenlänge (einige 10^{-2} m und einige 10^{-7} m) die gleichen Phänomene auftreten, zeigen die Versuche *Wellenwanne* und *Beugung von Laserlicht*.

Die Tatsache, dass Licht nicht nur „geradeaus“ durch ein Loch geht, sondern auch ein wenig „um die Ecke“, bezeichnet man als **Beugung** des Lichts. Die Beugung ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass Licht kein Strom von Teilchen ist, der sich entlang der Lichtstrahlen bewegt, sondern ganz klar Welleneigenschaften besitzt. Im Rahmen der Quantenphysik allerdings besitzt Licht interessanterweise doch auch Teilcheneigenschaften; darauf werden wir noch zu sprechen kommen.

Die Wellennatur von Licht untersucht der Versuch *Beugung von Laserlicht*. Bei diesem Versuch wird auch wieder ein Doppelspalt verwendet, um zwei Quellen für Wellen zu erhalten. Könnte man auch einfach zwei Laser oder irgendetwas anderen Lichtquellen nehmen und damit exakt die Situation aus Abbildung 2.11 nachbauen? — Mit zwei Glühbirnen, Gasflammen oder Kerzen würde das auf keinen Fall funktionieren, denn diese Quellen sind nicht **kohärent**; das bedeutet, die von ihnen erzeugten Wellenmuster sind nicht so regelmäßig wie in Abbildung 2.4, sondern sehen eher so aus wie in Abbildung 2.3. Es werden nur wenige Wellenberge nacheinander in exakt gleichen Abständen ausgesandt, danach folgt eine Unterbrechung, ein „Fehler“ im Wellenmuster. Damit wäre zu keiner Zeit und an keinem Ort eine konstante und genaue Phasenbeziehung zwischen den beiden Wellen möglich, das heißt, die Verschiebung zwischen den Wellenbergen der beiden Wellen würde räumlich und zeitlich so stark variieren, dass kein Interferenzmuster zu sehen wäre. Selbst wenn man zwei Laser verwenden würde, ginge es nicht, denn jeder Laser für sich kann über eine gewisse Zeit kohärente Wellen aussenden, aber die Phasenbeziehung zwischen den beiden Lasern ändert sich immer wieder, und zwar so schnell, dass zumindest das menschliche Auge keine Interferenz mehr wahrnimmt. Nur wenn man die kohärenten Wellen aus *einer* Lichtquelle durch zwei Spalte schickt und wieder zusammenführt, kann man die Interferenz beobachten.

Phasenbeziehung, Phasendifferenz

Zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge λ können verschiedene Amplituden haben und sie können zueinander verschoben sein, so dass die Wellenberge an verschiedenen Positionen sind. Diese Verschiebung drückt man aus mathematischen Gründen als Winkel aus. Eine halbe Wellenlänge entspricht einem Winkel von 180° . Diesen Winkel nennt man die **Phasendifferenz**, und wenn die Phasendifferenz zwischen zwei Wellen konstant bleibt, spricht man von einer festen **Phasenbeziehung**. Wichtige Spezialfälle sind 0° Phasendifferenz (gleichphasig) und 180° (gegenphasig). Ein Winkel von 360°

ist, wie immer, völlig gleichwertig zu einem Winkel von 0° , da eine Verschiebung um eine ganze Wellenlänge keinerlei Effekt hat, genauso wie eine Verschiebung um zwei Wellenlängen, also 720° , usw.

Eine interessante Situation entsteht, wenn man nicht nur zwei, sondern viele Spalte im gleichen Abstand nebeneinander anordnet und die Interferenz in *sehr* großem Abstand untersucht, also ganz anders als in Abbildung 2.11 gezeichnet. (Realistisch hat man beispielsweise im Experiment *Beugung von Laserlicht* zwischen dem Laser und dem Doppelspalt sowie zwischen dem Doppelspalt und den Beobachtungspunkt einige Dezimeter Abstand, aber zwischen den beiden Spalten nur Bruchteile von Millimetern.) Dann sind die Lichtwege von den zwei oder mehr Spalten zu einem der Beobachtungspunkte („A oder B“) praktisch parallel. Dann hat man aber zwischen den Wellen von zwei benachbarten Spalten immer den gleichen Gangunterschied. Wenn dieser Gangunterschied nun genau eine Wellenlänge (oder genau zwei Wellenlängen, oder genau drei...) beträgt, interferieren *sämtliche* Wellen von den *vielen* Spalten konstruktiv und das Licht wird an dieser Stelle sehr hell. Wo das geschieht, hängt natürlich von der Wellenlänge ab, und deshalb kann man eine solche Anordnung von vielen parallelen Spalten (ein **Beugungsgitter**) verwenden, um zu untersuchen, welche Wellenlängen das Licht einer Quelle (z.B. eines Sterns) enthält. Ein solches Beugungsgitter wird auch im Versuch *Spektroskopie* verwendet. Der Effekt funktioniert nicht nur mit einem Schirm mit vielen Spalten, sondern auch mit einer spiegelnden Oberfläche mit vielen regelmäßig angeordneten Linien; mit einer CD können Sie beispielsweise sehen, welche Farben im Sonnenlicht enthalten sind. (Falls Sie nicht wissen, was eine CD ist, fragen Sie Ihre Eltern.) Mit einem (sehr speziellen) Beugungsgitter konnten Davisson und Germer schon in der Frühzeit der Quantenmechanik (1927) nachweisen, dass Elektronen Welleneigenschaften besitzen. Wir kommen darauf im Abschnitt 2.5 zurück, wo der Versuch *Elektronenbeugung* beschrieben wird.

2.4 Was ist eine Wellenfunktion?

De Broglies Welle

Wie kann man auf die verrückte Idee kommen, dass ein Teilchen Eigenschaften einer Welle haben könnte, zum Beispiel eine Wellenlänge? — Ohne tief in die Wissenschaftsgeschichte einzusteigen kann man festhalten, dass die umgekehrte Idee zuerst da war: Planck (1900, Wärmestrahlung) und Einstein (1905, Photoeffekt) sahen Anzeichen dafür, dass elektromagnetische Wellen Energie nur in ganz bestimmten „Portionen“ aufnehmen oder abgeben konnten. Die Größe dieser **Energiequanten**, also ihre Energie, ist fest mit der Frequenz der Wellen verknüpft:

$$E = hf.$$

Dabei ist E die Energie des Quants, f die Frequenz der elektromagnetischen Welle und h die Planck'sche Konstante, auch Wirkungsquantum genannt. Die Energie der elektromagnetischen Welle besteht also aus einer Art von „Energieteilchen“. Im Jahr 1922 entdeckte Compton, dass auch der Impuls von elektromagnetischen Wellen quantisiert ist. Ein Lichtteilchen oder **Photon** hat außer der Energie auch noch einen Impuls p , der

mit der Wellenlänge λ verknüpft ist:

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Es stellte sich also heraus, dass Wellen auch Teilcheneigenschaften zeigen, immer dann, wenn sie Energie oder Impuls mit ihrer Umgebung austauschen.

In seiner Doktorarbeit ging dann de Broglie 1924 der Idee nach, dass umgekehrt Teilchen auch Welleneigenschaften haben könnten, dass insbesondere der Impuls p eines Teilchens mit einer Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

verknüpft sein könnte. Weder de Broglie selbst noch sonst jemand wusste aber, was denn da eigentlich Wellen schlägt, so wie die Wasseroberfläche bei Wasserwellen oder die elektrischen und magnetischen Felder bei Lichtwellen. Auch ergeben sich Wellen in der Physik normalerweise als Lösungen von Bewegungsgleichungen; die de-Broglie-Wellen waren aber zunächst einmal „frei erfunden“.

Bewegungsgleichungen

In der Physik sind Bewegungsgleichungen immer Differenzialgleichungen, d.h. sie geben zu einem bestimmten Zeitpunkt t an, wie sich der Zustand zeitlich ändert (mathematisch: Ableitungen nach der Zeit). Daraus kann der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt berechnet werden.

Für ein *klassisches* Teilchen ist die Bewegungsgleichung durch die Gesetze von Newton gegeben, z.B. in der Form „Kraft = Masse mal Beschleunigung“. Wenn die Kraft bekannt ist, kann aus der Beschleunigung berechnet werden, wie sich die Geschwindigkeit ändert, und daraus dann, wie sich der Ort ändert. Dann kann man die Bahn des Teilchens im Raum verfolgen, z.B. für einen Satelliten, der um die Erde kreist.

Die Bewegungsgleichung für ein *quantenmechanisches* Teilchen ist die Schrödingergleichung, eine Differenzialgleichung für die Wellenfunktion. Wegen der heisenbergschen Unschärferelation gibt es für ein quantenmechanisches Teilchen (z.B. ein Elektron in einem Atom) den Begriff der Bahn nicht.

Schrödingers Gleichung

Schrödinger begann dann die Suche nach der passenden Bewegungsgleichung zu den de-Broglie-Wellen und fand sie auch. Er untersuchte, wie sich die **Wellenfunktion** eines Elektrons verhält, das von der elektrischen Anziehungskraft eines Protons „festgehalten“ wird; mit anderen Worten, er berechnete die Eigenschaften eines Wasserstoffatoms und fand 1925/26 genau das Energiespektrum, das man sich bis dahin nur notdürftig erklären konnte. Damit war klar, dass die de-Broglie-Wellen und die Schrödingergleichung einen Durchbruch darstellten. Es war aber immer noch nicht klar, welche physikalische Bedeutung Schrödingers Wellenfunktion hat, wie man an den Spottversen sieht, die die Teilnehmer einer Tagung im Sommer 1926 in Zürich dichteten:

*Gar manches rechnet Erwin schon
Mit seiner Wellenfunktion.
Nur wissen möcht' man gerne wohl
Was man sich dabei vorstell'n soll.*

Das klärte sich tatsächlich erst im Laufe der Zeit, als die Schrödingergleichung auf viele verschiedene physikalische Situationen angewandt wurde. Heute ist ziemlich klar „was man sich dabei vorstellen soll“, auch wenn es eine kleine Zahl von Physikern gibt, die die Wellenfunktion im Detail anders interpretieren.

Etwas Wellen-Mathematik

Was haben nun physikalische Wellen mit mathematischen Funktionen zu tun? — Eine mehr oder weniger komplizierte Welle, die sich in einer Dimension entlang der x -Achse bewegt, so wie in den Abbildungen 2.6 oder 2.7, wird in jedem Augenblick durch eine mathematische Funktion $f(x)$ der Koordinate x beschrieben. Natürlich bewegt sich die Welle im Lauf der Zeit, das heißt, $f(x)$ ändert sich im Lauf der Zeit t . Man schreibt dann $f(x, t)$ und liest „ f von x und t “. Um eine zweidimensionale Fläche zu beschreiben, benötigt man zwei Koordinaten, üblicherweise mit x und y bezeichnet. Wellen auf einer Wasseroberfläche kann man dann durch die Auslenkung $h(x, y, t)$ beschreiben, die die Höhe h der bewegten Wasseroberfläche (im Vergleich zur ruhenden Wasseroberfläche) an jeder Stelle (x, y) zur Zeit t angibt. Natürlich kann $h(x, y, t)$ in den Wellentälern auch negativ werden. Etwas unübersichtlicher wird es bei elektromagnetischen Wellen, z.B. Lichtwellen, da dort elektrische und magnetische Felder im Spiel sind, die sich im dreidimensionalen Raum bewegen, den man mit den Koordinaten x, y und z beschreibt. Da die beiden Felder selbst Vektoren sind, also in eine bestimmte Richtung im Raum zeigen, haben sie jeweils drei Komponenten (Anteile) in den drei Raumrichtungen, die man z.B. für das elektrische Feld \vec{E} mit E_x, E_y und E_z bezeichnet. Jede der Komponenten hängt von den drei Raumkoordinaten und der Zeit ab, man hat also Funktionen $E_x(x, y, z, t)$, $E_y(x, y, z, t)$ und $E_z(x, y, z, t)$. Um die Schreibarbeit zu vereinfachen, sind einige Abkürzungen erfunden worden, die wir aber nicht lernen müssen, da wir sie nicht verwenden werden.

Wir wissen alle, dass Meereswellen um so mehr Schaden anrichten können, je höher sie sind. Das hat damit zu tun, dass höhere Wellen mehr Energie enthalten und transportieren. Für Wasserwellen ist das im Detail gar nicht so einfach zu berechnen, für elektromagnetische Wellen ist es aber vergleichsweise einfach. Es stellt sich heraus, dass der Energieinhalt mit dem *Quadrat* der beteiligten Felder zusammenhängt. Die Energiedichte (Energie pro Volumen) an der Stelle (x, y, z) zur Zeit t setzt sich zusammen aus einem Anteil proportional zu

$$|\vec{E}|^2 = (E_x(x, y, z, t))^2 + (E_y(x, y, z, t))^2 + (E_z(x, y, z, t))^2$$

und dem analogen Ausdruck, gebildet aus den drei Komponenten des Magnetfelds. Die Größe $|\vec{E}|$ (lies: Betrag des Vektors \vec{E}) ist die Länge des elektrischen Feldvektors, also die elektrische Kraft auf eine Einheitsladung.

Die Wellenfunktion der Quantenmechanik macht weniger Schreibarbeit als die Felder der elektromagnetischen Wellen, besonders wenn wir uns, wie bisher, auf eine Dimension x im Raum beschränken wollen. Traditionell wird die Wellenfunktion mit dem

griechischen Buchstaben Ψ (lies: Psi) bezeichnet, und in einer Dimension ist sie eine Funktion von x und der Zeit t :

$$\Psi(x, t).$$

Allerdings gibt es eine kleine Komplikation, $\Psi(x, t)$ ist nämlich eine **komplexe** Funktion, d.h. sie besteht aus zwei Teilen, $\operatorname{Re}\Psi(x, t)$ und $\operatorname{Im}\Psi(x, t)$ (lies: „Realteil von Psi und Imaginärteil von Psi“). Diese beiden Teile spielen eine ähnliche Rolle wie die Komponenten E_x , E_y und E_z des elektrischen Felds oder die Koordinaten x und y eines Punktes in einer Ebene, wo beispielsweise der Abstand r des Punktes (x, y) vom Nullpunkt nach Pythagoras berechnet werden kann:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Für den Augenblick ist das alles, was wir über komplexe Zahlen und komplexe Funktionen wissen müssen.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** z wird aus zwei reellen Zahlen x und y nach der Vorschrift

$$z = x + iy$$

gebildet. Dabei ist i die **imaginäre Einheit** mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

Man nennt x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z . Komplexe Zahlen kann man in einer Ebene mit x und y als Koordinaten in der üblichen Art und Weise darstellen (Gauß'sche Zahlenebene). Die Größe

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

bezeichnet man als **Betragsquadrat** von z . Der Betrag $|z|$ der Zahl z gibt dann den Abstand zwischen z und dem Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene an.

Zum Warmwerden berechne man einfach einmal das Produkt von $3 + 4i$ und $3 - 4i$. Tipp: Das Ergebnis ist reell und eine Quadratzahl.

Ähnlich wie $|\vec{E}|^2$ weiter oben ergibt sich aus der Wellenfunktion die wichtige Größe

$$|\Psi(x, t)|^2 = (\operatorname{Re}\Psi(x, t))^2 + (\operatorname{Im}\Psi(x, t))^2$$

(lies: „Psi-Betragsquadrat“). Im Gegensatz zu $|\vec{E}|^2$ bei den elektromagnetischen Wellen hat $|\Psi(x, t)|^2$ für die Wellenfunktion nichts mit der Energie zu tun; die ergibt sich auf ganz andere Weise, nämlich als **Eigenwert** aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung. (Genauer dazu findet sich im Artikel „Schrödingergleichung“ im Glossar, ist hier aber nicht unbedingt erforderlich.)

Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeit

Es stellt sich heraus, dass $|\Psi(x, t)|^2$ etwas mit der Wahrscheinlichkeit zu tun hat, das durch die Wellenfunktion beschriebene Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden². Das muss noch etwas präzisiert werden. Da sowohl $\operatorname{Re}\Psi(x, t)$ als auch $\operatorname{Im}\Psi(x, t)$ „ganz normale“ (also reelle) Funktionen von x und t sind, ist $|\Psi(x, t)|^2$ als Summe von zwei Quadraten auf jeden Fall positiv, schlimmstenfalls Null, aber nie negativ. Da negative Wahrscheinlichkeiten sinnlos sind, ist das schon einmal beruhigend.

Um die genaue Verbindung zur Wahrscheinlichkeit herzustellen, betrachten wir die Abbildung 2.12. Sie zeigt das Betragsquadrat einer möglichen Wellenfunktion für ein Teilchen, das sich in einer Dimension x bewegt, zu einer bestimmten Zeit t . Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Messung zwischen $x = 0.5$ und $x = 1$ zu finden, ist die Fläche unter der Kurve von $|\Psi(x, t)|^2$ auf dem Stück zwischen $x = 0.5$ und $x = 1$. (Für Besserwisser: Das bestimmte Integral von $|\Psi(x, t)|^2$ von $x = 0.5$ bis $x = 1$.) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen *irgendwo* auf der x -Achse zu finden, muss gleich Eins sein, denn irgendwo muss es sich ja aufhalten. Darum muss die Fläche, die die Kurve von $|\Psi(x, t)|^2$ mit der *gesamten* x -Achse einschließt, gleich Eins sein. Eine Wellenfunktion $\Psi(x, t)$, die nicht diese Eigenschaft hat, ist physikalisch sinnlos und deshalb unzulässig. (Fachleute sprechen davon, dass anständige Wellenfunktionen **normiert** sein müssen.) $|\Psi(x, t)|^2$ ist ein Beispiel für eine **Wahrscheinlichkeitsdichte**, die angibt, wie sich die Wahrscheinlichkeit im Raum (hier: auf der x -Achse) verteilt.

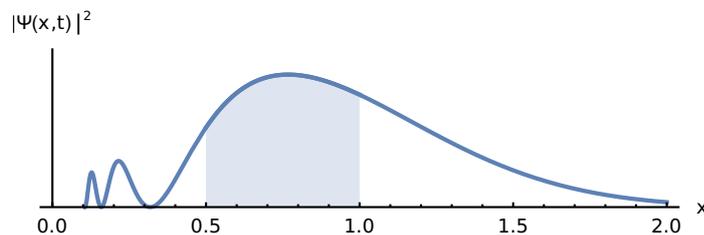


Abbildung 2.12: $|\Psi(x, t)|^2$ für eine typische Wellenfunktion. Die schattierte Fläche gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Teilchen zwischen $x = 0.5$ und $x = 1$ zu finden ist. (Grafik: Stolze)

Die Wellenfunktion enthält *sämtliche* Information, die man über ein Teilchen bekommen kann. Die Quantenmechanik kann keine Aussagen über den „genauen“ Ort des Teilchens machen; dieser Begriff ist letztlich sinnlos. Man kann nur angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in einem bestimmten Bereich zu finden ist, wenn man nachschaut. Viele Physiker in der Frühzeit der Quantenmechanik (auch Einstein) glaubten, dass das noch nicht die ganze Wahrheit sein könne, dass es noch „versteckte Variablen“ geben müsse, also Größen, die genau bestimmen, „wo das Teilchen wirklich ist“, und die wir bloß nicht kennen. Inzwischen ist eindeutig geklärt, dass es solche versteckten Mechanismen nicht geben kann.

Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Der Zustand eines Teilchens in einer Dimension zur Zeit t ist durch die Wel-

² Was die Rolle von $\Psi(x, t)$ „selbst“ (also ohne $|\dots|^2$) ist, werden wir im Abschnitt 2.5 und im Kapitel 5 näher betrachten.

lenfunktion $\Psi(x, t)$ *vollständig* bestimmt. Trotzdem ist das Ergebnis einer **Einzelmessung** (also einer einmaligen Messung) des Orts x (oder einer anderen Messgröße) nicht vorhersagbar. Wenn man aber sehr oft hintereinander folgende Operationen durchführt:

1. Stelle den Zustand $\Psi(x, t)$ her,
2. Messe den Ort x und
3. Registriere das Ergebnis der Ortsmessung,

dann stellt sich allmählich die Verteilung der Messergebnisse des Orts ein, die durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ gegeben ist.

Im Unterschied zu einer Einzelmessung ist das eine statistische Messung; Experten sprechen oft von **Ensemblemessungen**. Wichtig ist, dass man das System immer wieder neu *präpariert*, also den Ausgangszustand $\Psi(x, t)$ herstellt. Alternativ kann man sich auch eine große Anzahl von Teilchen vorstellen, die alle im gewünschten Zustand $\Psi(x, t)$ sind (ein Ensemble von Teilchen), und an jedem Teilchen wird ein einziges Mal gemessen.

Nach einer Einzelmessung ist der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* $\Psi(x, t)$, sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat.

Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.

Messungen verändern Zustände

Wenn ein Teilchen in einem Zustand Ψ ist und an diesem Teilchen eine (Einzel-) Messung durchgeführt wird, dann ist nach der Messung der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* Ψ , sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat. *Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.*

Ein einfaches Beispiel ist eine Messung, die feststellt, „auf welcher Seite“ ein Teilchen ist, also bei $x > 0$ („rechts“) oder bei $x \leq 0$ („links“). Vor der Messung, im Zustand Ψ , hält sich das Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit links und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit rechts auf. (Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten beträgt natürlich Eins.) Die Messung versetzt das Teilchen *entweder* in einen Zustand Ψ_{rechts} *oder* in einen Zustand Ψ_{links} . Wenn der Messwert „rechts“ gemessen wurde und man führt unmittelbar nach der ersten Messung eine zweite durch (ohne ansonsten irgendwie auf das Teilchen einzuwirken), dann wird das Ergebnis mit Sicherheit wieder „rechts“ sein.

Die erste Messung hat hier den Zustand festgelegt. Man sagt, der anfängliche Zustand Ψ sei zum Zustand Ψ_{rechts} **kollabiert** oder auf diesen Zustand **reduziert** worden. Die Zustände Ψ_{rechts} und Ψ_{links} bezeichnet man als **Eigen-**

zustände der Messgröße „Seite“. Ein Eigenzustand ist ein Zustand, in dem die Messung der zugehörigen Größe mit Sicherheit einen ganz bestimmten Wert (den **Eigenwert**) liefert.

Nach der Messung entwickelt sich der Zustand des Teilchens gemäß der Schrödingergleichung weiter, und damit kann sich das Teilchen möglicherweise auch wieder nach links bewegen, so dass die durch die Messung festgelegte Eigenzustands-Eigenschaft wieder verloren geht. Darum erhält man auch nur dann bei den beiden geschilderten Messungen gleiche Ergebnisse, wenn sie *unmittelbar* nacheinander ausgeführt werden.

Wir haben hier immer nur über die Messung des Orts x gesprochen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ direkt abgelesen. Die Quantenmechanik liefert aber auch Rechenvorschriften, wie man für andere Messgrößen (Impuls, Energie, Drehimpuls,...) Wahrscheinlichkeiten aus der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ berechnet. Auch für diese Messgrößen lassen sich die Ergebnisse einer Einzelmessung nur in Ausnahmefällen vorhersagen.

Wir haben hier einen sehr gewöhnungsbedürftigen Zug der Quantenmechanik kennengelernt, nämlich die Tatsache, dass sie für viele Fragen keine eindeutigen Antworten liefert, sondern nur Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Möglichkeiten. Trotzdem halten wir fest (zum wiederholten Mal, weil es so wichtig ist), dass die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ den Zustand eines Teilchens *vollständig* beschreibt; mehr Information als in $\Psi(x, t)$ enthalten ist, *gibt es nicht*. Dennoch ist hier nicht, wie manche Leute glauben, dem Zufall Tür und Tor geöffnet. Wenn $\Psi(x, t)$ zur Zeit $t = 0$ bekannt ist, liefert die Schrödingergleichung $\Psi(x, t)$ für alle Zukunft. Der Zufall hat immer nur dann eine Chance (und nutzt sie auch), wenn eine Messung durchgeführt wird. Auch wenn die Wellenfunktion für alle Zeiten vorherbestimmt (determiniert) ist, kann man das Ergebnis einer einzelnen Ortsmessung zu einer zukünftigen Zeit nicht vorhersagen. Hier könnte man protestieren und etwa sagen: „Aber ich kann doch die Bahn eines Satelliten oder den Fall eines Steins genau berechnen; was soll dieser ganze Quanten-Unsinn?“ Um solche Einwände zu behandeln, muss man einmal genauer hinschauen und etwas tun, was viele Leute gar nicht mögen, nämlich ein paar Zahlen ausrechnen und vergleichen. Damit werden wir uns im Abschnitt 3.1 beschäftigen.

Zwei Zustände zur gleichen Zeit

Es gibt noch eine zweite, mindestens ebenso gewöhnungsbedürftige Eigenschaft der Quantenmechanik, genauer gesagt, der Wellenfunktion. Schon bei den Wasserwellen konnten wir sehen: Wellen kann man überlagern. Die Summe von zwei möglichen Wellen ist wieder eine mögliche Welle. Das ist eigentlich überhaupt nicht aufregend. Aufregend wird es erst, wenn man den Begriff „Welle(nfunktion)“ mit dem Begriff „Zustand eines Teilchens“ identifiziert, wie es die Quantenmechanik tut. Wenn $\Psi_a(x, t)$ und $\Psi_b(x, t)$ zwei zulässige Zustände eines Teilchens sind, dann ist auch $\Psi_a(x, t) + \Psi_b(x, t)$ ein zulässiger Zustand.³ *Das Teilchen kann also zur gleichen Zeit in zwei unterschiedlichen Zuständen sein!* Das extremste Beispiel, das wir sicher

³Wer die ganze Zeit aufmerksam war, sieht ein Problem: Die Summe aus zwei normierten Wellenfunktionen ist vermutlich nicht mehr normiert. — Bravo! Gut aufgepasst! Man muss in der Tat noch einen geeigneten Vorfaktor anbringen, damit die Summe wieder normiert ist. Das ist aber kein ernsthaftes Problem.

nicht vollständig diskutieren können, ist Schrödingers berühmte Katze, die angeblich gleichzeitig lebendig und tot ist. Einige nicht ganz so beunruhigende Aspekte diskutieren wir im Kapitel 3.

Um es noch einmal klarzustellen: Bei der Überlagerung von zwei möglichen Zuständen geht es nicht etwa um zwei Teilchen, von denen eins im Zustand $\Psi_a(x, t)$ und das andere im Zustand $\Psi_b(x, t)$ ist, sondern um *ein einziges* Teilchen, dessen Zustand eine „gewichtete Summe“ $\alpha\Psi_a(x, t) + \beta\Psi_b(x, t)$ mit (komplexen) Zahlen α und β ist; technisch spricht man von einer **Linearkombination**.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** z wird aus zwei reellen Zahlen x und y nach der Vorschrift

$$z = x + iy$$

gebildet. Dabei ist i die **imaginäre Einheit** mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

Man nennt x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z . Komplexe Zahlen kann man in einer Ebene mit x und y als Koordinaten in der üblichen Art und Weise darstellen (Gauß'sche Zahlenebene). Die Größe

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

bezeichnet man als **Betragsquadrat** von z . Der Betrag $|z|$ der Zahl z gibt dann den Abstand zwischen z und dem Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene an.

Zum Warmwerden berechne man einfach einmal das Produkt von $3 + 4i$ und $3 - 4i$. Tipp: Das Ergebnis ist reell und eine Quadratzahl.

Ein Beispiel wäre ein Zustand, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte so aussieht wie in Abbildung 2.13. Wenn die beiden Teile der Wellenfunktion sich aufeinander zubewegen, stellt sich die Frage, was bei einer Kollision der beiden Anteile geschieht. Antwort: Eigentlich geschieht gar nichts, denn die Teil-Wellenfunktionen überlagern sich einfach. Aber durch die Kombination des Überlagerungsprinzips für $\Psi(x, t)$ mit der Rolle von $|\Psi(x, t)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte entstehen erklärungsbedürftige Situationen, die im nächsten Abschnitt 2.5 behandelt werden.

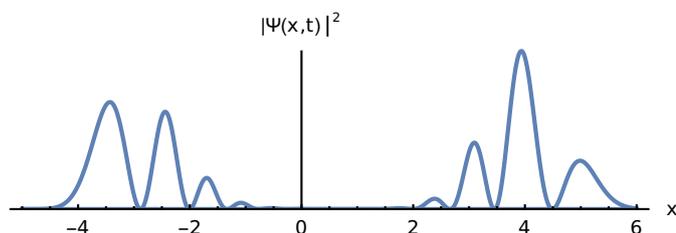


Abbildung 2.13: $|\Psi(x, t)|^2$ für eine Wellenfunktion, die aus zwei räumlich getrennten Anteilen besteht. (Grafik: Stolze)

2.5 Interferenz und Quantenphysik

Wir halten noch einmal die wichtigsten Fakten über die Quantenmechanik aus dem letzten Abschnitt fest. Der Zustand eines Teilchens wird beschrieben durch die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$. Eine Summe aus zwei (oder mehr) zulässigen Wellenfunktionen ist auch eine zulässige Wellenfunktion. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden, ist durch $|\Psi(x, t)|^2$ gegeben. Zwei (oder mehr) Wellenfunktionen können also miteinander interferieren und sich dabei verstärken oder abschwächen, genauso wie klassische Lichtwellen, die im *Treffpunkt Quantenmechanik* ebenfalls untersucht werden.

Um all diese Experimente, auch die mit klassischen Lichtwellen, gut zu verstehen, befassen wir uns noch einmal genauer mit der Interferenz zwischen zwei Sendern, wie in der Abbildung 2.11. Im Experiment *Wellenwanne* können die Wellen direkt auf der Wasseroberfläche beobachtet werden. Das geht bei Experimenten mit Lichtwellen nicht mehr, da deren Wellenlänge viel zu kurz ist und da das Licht durch den Raum läuft, ohne Spuren zu hinterlassen. Erst wenn das Licht auf eine Fläche trifft, kann man es beobachten, auf einem Schirm oder mit einem geeigneten Detektor.

Interferenz zwischen zwei Punktquellen

Wir untersuchen also, wie das Helligkeitsmuster auf einem Schirm aussieht, wenn die Lichtwellen von zwei punktförmigen Quellen (Sendern) miteinander interferieren. Im Abschnitt 2.3 hatten wir gesehen, dass es auf den Gangunterschied zwischen den Wellen ankommt, die sich auf dem Schirm treffen: Wenn der Gangunterschied Null ist, gibt es konstruktive Interferenz, wenn er eine halbe Wellenlänge ist, gibt es destruktive Interferenz, und bei einem Gangunterschied von einer ganzen Wellenlänge ist die Interferenz wieder konstruktiv. Was heißt das konkret? Wie groß ist der Abstand zwischen zwei hellen Stellen auf dem Schirm?

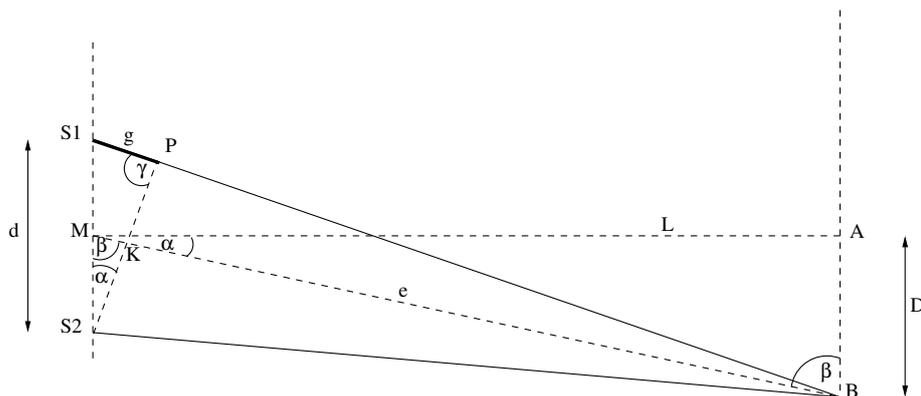


Abbildung 2.14: Interferenz zwischen zwei Punktquellen S_1 und S_2 auf einem Beobachtungsschirm in großem Abstand L . Am Punkt A herrscht konstruktive Interferenz, am Punkt B haben die Elementarwellen einen Gangunterschied g . Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht; der Abstand L ist sehr viel größer als die Abstände d und D . (Grafik: Stolze)

Dazu betrachten wir die Situation in Abbildung 2.14. Zwei Quellen S_1 und S_2 haben einen Abstand d voneinander. In einem großen Abstand $L \gg d$ von den Quellen steht

der Schirm, parallel zu der Ebene, in der die Quellen liegen. Am Punkt A herrscht konstruktive Interferenz, da er genau gleich weit von den beiden Quellen S_1 und S_2 entfernt liegt. In welchem Abstand D muss dann der Punkt B liegen, damit dort wieder konstruktive Interferenz herrscht? Für konstruktive Interferenz muss der Gangunterschied g zwischen den beiden bei B eintreffenden Wellen von S_1 und S_2 gerade gleich der Wellenlänge sein: $g = \lambda$. Dann ist der Abstand D zwischen den beiden hellen Stellen A und B auf dem Schirm

$$D = \frac{\lambda L}{d}.$$

Diese Beziehung lässt sich geometrisch begründen. Wer an den Details nicht interessiert ist, kann diesen Absatz überspringen. Der Sinussatz im Dreieck $S_1 S_2 P$ liefert

$$\frac{g}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \gamma}.$$

Der spitze Winkel bei M ist ebenfalls α . Um das zu sehen, vergleichen wir das kleine Dreieck $M S_2 K$ mit dem großen Dreieck $M B A$. Beide Dreiecke sind rechtwinklig: Bei A liegt konstruktionsbedingt ein rechter Winkel vor, und der Winkel bei K im kleinen Dreieck beträgt ebenfalls 90° , da $K B$ die Höhe in gleichschenkligen Dreieck $P S_2 B$ ist. Der Winkel β bei B im großen Dreieck $M B A$ taucht als Wechselwinkel bei M im kleinen Dreieck $M S_2 K$ noch einmal auf. Beide Dreiecke (klein und groß) sind also rechtwinklig und enthalten den Winkel β . Damit muss der dritte Winkel, also α , auch identisch sein.

Im großen Dreieck $M B A$ liefert die Definition des Sinus dann

$$\sin \alpha = \frac{D}{e}.$$

Nun nutzen wir die Größenverhältnisse aus. Für ein realistisches Experiment mit sichtbarem Licht sind die Abstände d und D von der Größenordnung Millimeter oder kleiner, der Abstand L ist aber ein halber Meter oder mehr. Dann ist der Winkel α sehr klein und der Winkel $\gamma \approx 90^\circ$, so dass $\sin \gamma \approx 1$ ist. Einsetzen von $\sin \alpha$ und $\sin \gamma$ in den Sinussatz liefert dann

$$\frac{ge}{D} = d$$

und da wegen der Größenverhältnisse $e \approx L$ ist, ergibt sich

$$\frac{gL}{D} = d.$$

Da der Gangunterschied g gleich der Wellenlänge λ sein soll, ergibt sich durch Einsetzen und Umstellen die angegebene Gleichung für D . Die nächsten Stellen mit konstruktiver Interferenz, also mit Gangunterschied 2λ , 3λ usw. liegen dann in der Entfernung $2D$, $3D$ usw. vom Punkt A , denn die entsprechenden Winkel (etwa 2α , 3α usw.) sind immer noch sehr klein und wir können genauso argumentieren wie oben.

Für einen realistischen Versuchsaufbau verwenden wir rotes Licht mit $\lambda = 600\text{nm} = 600 \cdot 10^{-9}\text{m}$, einen Abstand zwischen den Quellen von $d = 0,3\text{mm} = 0,3 \cdot 10^{-3}\text{m}$ und einen Abstand zum Schirm $L = 0,5\text{m}$. Dann ergibt sich der Abstand zwischen den Punkten A und B zu

$$D = 1\text{mm}.$$

Die Verhältnisse sind also viel extremer als in der Abbildung 2.14 dargestellt: B liegt sehr viel näher an A . An der Formel für D , die wir uns eben überlegt haben, sieht man:

- D wird größer, wenn L zunimmt, also der Schirm weiter weg geschoben wird.
- D wird größer, wenn λ zunimmt, also Licht mit längerer Wellenlänge benutzt wird.
- D wird größer, wenn d abnimmt, also der Abstand der Quellen *verkleinert* wird.

Im Experiment *Beugung von Laserlicht* werden als Lichtquellen zwei Spalte verwendet, die von einem einzigen Laser (von hinten) beleuchtet werden. Die Gründe dafür (Stichwort: Kohärenz) hatten wir schon im Abschnitt 2.3 genannt. Als Interferenzmuster auf dem Schirm hinter den Spalten erwarten wir dann viele Streifen im Abstand D , denn wenn wir vom Punkt B aus um $D, 2D, 3D \dots$ weiter gehen, erhalten wir eine Gangdifferenz von $2\lambda, 3\lambda, 4\lambda \dots$ und damit immer wieder konstruktive Interferenz.

Eine ausgedehnte Quelle: Beugung am Spalt

Wenn wir das Experiment *Beugung von Laserlicht* tatsächlich durchführen, ergibt sich ein anderes Bild: Neben dem hellen Streifen an der Stelle A in der Abbildung 2.14 sieht man noch einige wenige weitere helle Streifen im Abstand D , aber dann wird es dunkel; Beispiele dafür sind in Abbildung 2.16 zu sehen. Das liegt daran, dass die zwei Spalte, die als Lichtquellen (Sender) dienen, eine endliche Breite haben, und das muss sein, damit überhaupt so viel Licht durchdringt, dass man etwas sehen oder messen kann.

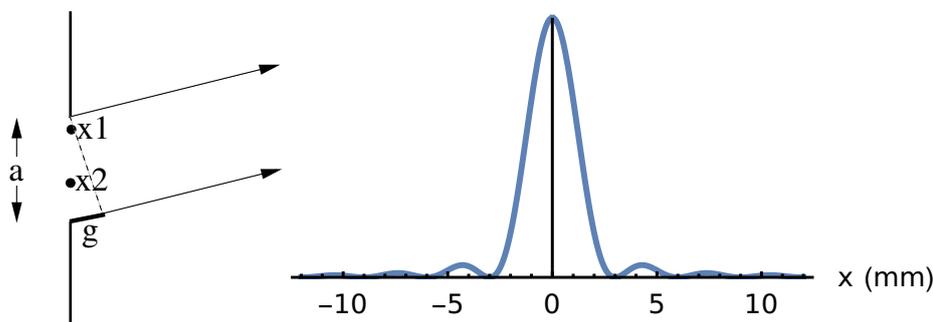


Abbildung 2.15: Links: Ein einzelner Spalt der Breite a ; der Gangunterschied g zwischen Elementarwellen von den beiden Kanten des Spalts beträgt eine Wellenlänge; zwischen den beiden Punkten x_1 und x_2 beträgt er eine halbe Wellenlänge. Rechts: Lichtverteilung (Intensität) auf einem Schirm im $0,5\text{m}$ Abstand hinter einem Spalt mit $a = 0,1\text{mm}$, für Licht mit $\lambda = 600\text{nm}$. x ist der Abstand vom Punkt maximaler Intensität. Die beiden Nullstellen der Intensität neben dem Maximum entsprechen gerade der Situation im linken Teilbild: Der Gangunterschied zwischen den Elementarwellen von den beiden Kanten des Spalts beträgt genau eine Wellenlänge. (Grafik: Stolze)

Um zu verstehen, was passiert, betrachten wir zunächst einen einzelnen Spalt der Breite a (Abbildung 2.15). Nach dem Huygens'schen Prinzip (Abschnitt 2.3) gehen von jedem Punkt des Spalts Elementarwellen aus, die auf dem Schirm interferieren. In der Richtung genau „geradeaus“ (also auf dem Schirm gegenüber von der Mitte des Spalts) interferieren alle diese Elementarwellen konstruktiv; dort erwarten wir deshalb maximale Helligkeit. Nun betrachten wir aber eine „schräge“ Richtung, die einen Gangunterschied zwischen den Elementarwellen bewirkt. Wir wählen die Richtung so, dass der Gangunterschied g in der Abbildung 2.15 zwischen den Elementarwellen von der

oberen Kante des Spalts und der unteren Kante des Spalts genau eine Wellenlänge beträgt, also $g = \lambda$ für die beiden Punkte mit Abstand a . Dann gibt es zu jeder Stelle im Spalt (z.B. x_1) eine Stelle (z.B. x_2), die genau im Abstand $a/2$ liegt. Die Elementarwellen von diesen beiden Stellen haben dann einen Gangunterschied $\lambda/2$ und interferieren darum destruktiv. In dieser Richtung erwarten wir also *kein Licht* auf dem Schirm. Wenn wir die Richtung weiter von der Geradeaus-Richtung wegdrehen, wird der Gangunterschied g zwischen den beiden Kanten des Spalts größer als λ und es interferieren nicht mehr alle Elementarwellen destruktiv, aber immer noch die meisten. Deshalb gibt es wieder etwas mehr Licht auf dem Schirm, aber längst nicht mehr so viel wie in der Geradeaus-Richtung. Die Verteilung der Lichtintensität auf dem Schirm ist in der Abbildung 2.15 (rechts) dargestellt. Diese Verteilung begrenzt dann die Helligkeit des vorhin besprochenen Streifenmusters, das man für zwei ideale Punktquellen bzw. zwei „unendlich schmale“ Spalte erwartet.

Die Intensitätsverteilung für einen einzelnen Spalt hängt von der Wellenlänge λ und der Spaltbreite a ab. Je größer a ist, desto weniger müssen wir in Abbildung 2.15 (links) die Pfeile aus der Geradeaus-Richtung verdrehen, um den Gangunterschied λ zu erreichen, also die erste Nullstelle der Intensitätsverteilung. Die Breite des zentralen Maximums in Abbildung 2.15 (rechts) (und damit der gesamten Intensitätsverteilung) nimmt also ab, wenn a zunimmt: Je breiter der Spalt, desto schmaler das Beugungsmuster. Statt a zu vergrößern, können wir nach dieser Argumentation auch λ verkleinern: Je kleiner die Wellenlänge, desto schmaler das Beugungsmuster. Letztlich kommt es nur auf das Verhältnis $\frac{\lambda}{a}$ an.

Zwei ausgedehnte Quellen: Beugung von Licht am Doppelspalt

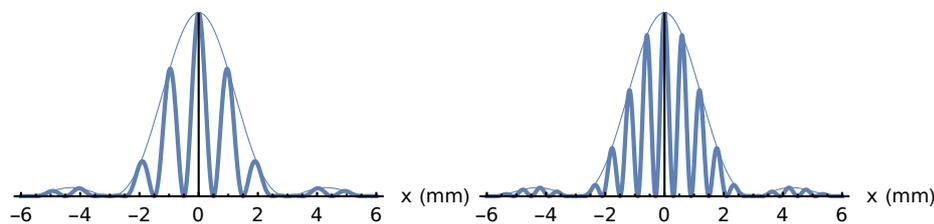


Abbildung 2.16: Intensitätsverteilung auf einem Schirm 0,5m hinter einem Doppelspalt (dicke Linie). Jeder Spalt ist $a = 0,1\text{mm}$ breit, die Mittelpunkte der Spalte sind $d = 0,3\text{mm}$ (links) bzw. $d = 0,5\text{mm}$ voneinander entfernt (rechts). $\lambda = 600\text{nm}$. Die dünne Linie ist die Intensitätsverteilung für einen Einzelspalt von 0,1mm Breite. x ist der Abstand vom Punkt maximaler Intensität. (Grafik: Stolze)

Abbildung 2.16 zeigt zwei Beispiele für das Interferenzmuster hinter einem Doppelspalt. Die beiden Spalte sind jeweils $a = 0,1\text{mm}$ breit, und der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Spalte beträgt im linken Bild $d = 3a = 0,3\text{mm}$, im rechten Bild $d = 5a = 0,5\text{mm}$. Die weiter oben hergeleitete Gleichung $D = \frac{\lambda L}{d}$ für den Abstand der Helligkeitsmaxima wird in der Abbildung bestätigt: Der größere Abstand d zwischen den Spalten (rechtes Bild) liefert einen kleineren Abstand D der Helligkeitsmaxima. Die endliche Breite der einzelnen Spalte sorgt dafür, dass die Helligkeitsmaxima nach außen hin stark gedämpft werden; die dünne Linie in der Abbildung zeigt die Intensitätsverteilung für *einen* Spalt. Das Verhältnis 3:5 der Spaltabstände beobachtet man wieder, wenn man die Helligkeitsmaxima von $x = 0$ bis $x = 3\text{mm}$ zählt, wo das Helligkeitsmuster des Einzelspalts seine erste Nullstelle hat.

Eine ähnliche Helligkeitsverteilung wie in der Abbildung 2.16 können Sie im Experiment *Beugung von Laserlicht* ausmessen. Je nach Breite und Abstand der beiden Spalte wird das Helligkeitsmuster unterschiedlich sein; zwei Möglichkeiten zeigt die Abbildung. Im Experiment *Doppelspalt mit einzelnen Photonen* können Sie wahlweise einen der beiden Spalte blockieren. Dann können Sie das Interferenzmuster für einen Einzelspalt beobachten (Abbildung 2.15 bzw. dünne Linie in Abbildung 2.16) und mit dem Interferenzmuster des Doppelspalts (dicke Linie in Abbildung 2.16) vergleichen. Dabei sollten Sie beachten, dass die Intensitätsverteilungen für einen bzw. zwei Spalte (dünne bzw. dicke Linien in Abbildung 2.16) in unterschiedlichem Maßstab gezeichnet sind, um sie besser vergleichen zu können. Die Intensität bei $x = 0$ ist für einen Doppelspalt in Wirklichkeit natürlich größer als für einen Einzelspalt. Durch destruktive Interferenz kommt zwar in bestimmten Bereichen für den Doppelspalt weniger Licht auf dem Schirm an als für den Einzelspalt; die *gesamte* Lichtintensität ist für zwei gleiche Spalte aber doppelt so groß wie für einen Spalt, weil durch zwei Spalte doppelt so viel Energie auf den Schirm gelangt wie durch einen.

Bereits die Beugung und Interferenz von klassischen Lichtwellen an zwei Spalten ist ein erstaunliches Phänomen: Wenn man einen der beiden Spalte *abdeckt*, wird es an einigen Stellen *heller*, und wenn man den zweiten Spalt wieder öffnet, wird es an diesen Stellen wieder dunkel. „Licht + Licht = Dunkelheit“ ist also manchmal eine richtige Gleichung. Die Intuition wehrt sich aber bereits bei klassischen Lichtwellen dagegen, das anzuerkennen. Dass die Quantenmechanik die Grenzen zwischen Wellen und Teilchen verwischt, macht es nicht einfacher. Interferenzphänomene gehören zum Kern der Quantenmechanik und tragen ganz wesentlich zu dem Unbehagen bei, das sie bei vielen Menschen hervorruft.

Das Doppelspaltexperiment eignet sich sehr gut, um Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen klassischer Physik und Quantenphysik zu diskutieren und wird uns deshalb in diesem Abschnitt immer wieder beschäftigen.

Doppelspaltexperiment mit klassischen Teilchen

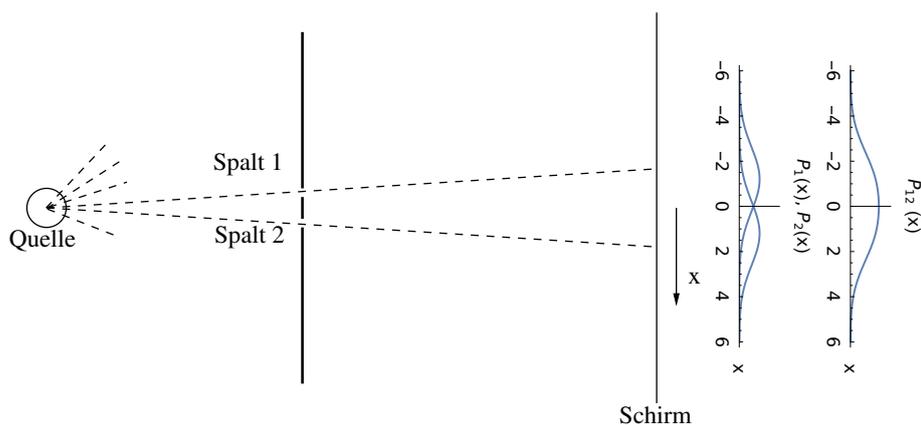


Abbildung 2.17: Doppelspaltexperiment mit klassischen Teilchen. Die Quelle schickt ungezielt Teilchen in Richtung des Doppelspalts. Wenn nur der Spalt 1 geöffnet ist, bilden die Teilchen auf dem Schirm die Verteilung $P_1(x)$, wenn nur Spalt 2 geöffnet ist, ergibt sich $P_2(x)$. Wenn beide Spalte geöffnet sind, ist die Verteilung $P_{12}(x)$. (Grafik: Stolze)

Das Doppelspaltexperiment mit klassischen Lichtwellen haben wir ausführlich diskutiert. Wir vergleichen es nun mit einem entsprechenden Experiment mit klassischen Teilchen, etwa kleinen Kügelchen, die von einer Apparatur ungezielt gegen die Wand mit dem Doppelspalt „geschossen“ werden. Die meisten Teilchen werden an der Wand abprallen, einige werden durch die Spalte hindurch fliegen, einige werden dabei die Ränder der Spalte berühren und abgelenkt werden. Hinter der Wand befindet sich ein Schirm, der registriert, wo er wie oft von einem Teilchen getroffen wurde. Das Ergebnis ist eine Verteilung $P(x)$, die sagt, wieviele Teilchen nach dem Experiment an der Stelle x des Schirms eingetroffen sind (Abbildung 2.17). Wir führen nun das Experiment dreimal hintereinander durch. Wir öffnen erst nur den Spalt 1, dann nur den Spalt 2 und schließlich beide Spalte. Die gemessenen Verteilungen nennen wir $P_1(x)$, $P_2(x)$ und $P_{12}(x)$. Im ersten Experiment gehen alle Kugeln durch Spalt 1, im zweiten Experiment gehen alle Kugeln durch Spalt 2. Welche Verteilung werden wir erhalten, wenn beide Spalte geöffnet sind? — Ganz einfach: Zuzüglich zu den Kugeln, die in unserem zweiten Experiment durch Spalt 2 gegangen sind, erhalten wir noch diejenigen, die durch Spalt 1 gegangen wären, wenn er offen gewesen wäre, also genau diejenigen, die wir im ersten Experiment gemessen haben. Für die Gesamtverteilung ergibt sich also

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x),$$

oder in Worten: „Teilchen + Teilchen = mehr Teilchen“.

Bei den beiden ersten Experimenten wissen wir genau, durch welchen Spalt die Teilchen gegangen sind (weil jeweils nur einer offen war), beim dritten Experiment hätten wir das auch feststellen können, da wir ja die Bahnen der Teilchen im Raum verfolgen können, wenn wir wollen, z.B. mit einer Videokamera.

Das ist soweit überhaupt nicht überraschend und entspricht genau unseren Vorstellungen; ganz anders ist aber schon das Experiment mit Lichtwellen am Doppelspalt. Wenn nur ein Spalt offen ist, können wir selbstverständlich sagen, durch welchen Spalt die Welle gegangen ist, und es ergibt sich das Helligkeitsmuster für einen Einzelspalt, wie in Abbildung 2.15. Wenn beide Spalte offen sind, können wir aber *nicht* sagen, „durch welchen Spalt die Welle gegangen ist“ und es ergibt sich ein Helligkeitsmuster, das *nicht* einfach die Summe der Ergebnisse für zwei Einzelspalte ist, vgl. Abbildung 2.16. An manchen Stellen gilt dann „Licht + Licht = Dunkelheit“.

Doppelspaltexperiment mit quantenmechanischen Teilchen, Elektronenbeugung und ein spannender Film aus Japan

Würden wir das Doppelspaltexperiment mit Elektronen (oder anderen quantenmechanischen Teilchen) durchführen, ergäbe sich genau das gleiche Bild wie bei Lichtwellen. *Elektronen bewegen sich also durch den Doppelspalt wie Wellen.*

Praktisch ist es sehr schwierig, das Doppelspaltexperiment so wie beschrieben mit Elektronen durchzuführen⁴; deswegen wird im *Treffpunkt Quantenmechanik* ein anderes Experiment benutzt, um die Welleneigenschaften von Elektronen nachzuweisen, nämlich das Experiment *Elektronenbeugung*. Dabei wird die Interferenz von Elektronenwellen an einem *Gitter* nachgewiesen. Diese Situation hatten wir schon kurz am

⁴ Elektronen sind geladen, und wenn sich in der Apparatur Elektronen ansammeln, die nicht durch die Spalte gegangen sind, üben sie elektrische Abstoßungskräfte auf die später kommenden Elektronen aus, die das Experiment beeinflussen. Im Extremfall ist die Wand mit den Spalten dann so stark geladen, dass alle weiteren Elektronen zurückgestoßen werden.

Ende des Abschnitts 2.3 angesprochen: Wenn Wellen von vielen gleichmäßig nebeneinander angeordneten Spalten konstruktiv miteinander interferieren, entstehen sehr hohe und scharfe Interferenzmaxima. Wenn der Gangunterschied zwischen den Wellen von zwei benachbarten Spalten gerade eine Wellenlänge beträgt, spricht man vom Maximum erster Ordnung, bei zwei Wellenlängen Gangunterschied von der zweiten Ordnung usw.

De-Broglie-Wellenlänge

Ein Teilchen mit Masse m , das sich mit Geschwindigkeit v bewegt, hat den Impuls $p = mv$. In der Quantenmechanik hat dieses Teilchen dann eine Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

wobei h die Planck-Konstante ist. Die Wellenlänge ist also um so kürzer, je schwerer das Teilchen ist und je schneller es sich bewegt.

Das Gitter im Versuch *Elektronenbeugung* besteht aus den regelmäßig in Ebenen angeordneten Atomen in einem dünnen Graphitkristall. Damit die Elektronen sich frei bewegen können, findet das Experiment in einem luftleer gepumpten Glaskolben statt. Nachdem die Elektronen auf den Graphitkristall getroffen sind, fallen sie auf einen Schirm, auf dem Licht entsteht. (Früher wurden ähnliche Bildröhren in Fernsehgeräten und Computermonitoren verwendet; Ihre Eltern erinnern sich vielleicht noch daran.) Nur wenn die de-Broglie-Wellen der Elektronen in einem ganz bestimmten Winkel auf die Ebenen von regelmäßig angeordneten Kohlenstoffatomen im Graphitkristall fallen, interferieren sie konstruktiv miteinander, so wie Licht, das auf eine Anordnung von vielen Spalten in gleichen Abständen oder von vielen Linien auf einer spiegelnden Oberfläche (ein Beugungsgitter) trifft. In diesem Fall werden sie im gleichen Winkel reflektiert; andernfalls interferieren sie destruktiv miteinander und liefern kein Signal. Da der verwendete Graphitkristall aus vielen kleinen unterschiedlich ausgerichteten Teilkristallen besteht, erfolgt die Ablenkung der Elektronen zwar immer um den gleichen Winkel, aber an jedem Teilkristall in eine andere Richtung, so dass die abgelenkten Elektronen auf dem Schirm einen Ring um den durchgehenden Strahl herum bilden. Da ein Graphitkristall zwei unterschiedliche Abstände zwischen verschiedenen Ebenen aufweist, beobachtet man zwei solche Beugungsringe erster Ordnung. Die höheren Ordnungen sind zu schwach, um sie in diesem Aufbau zu sehen.

All dies funktioniert natürlich nur, wenn alle Elektronen die gleiche Wellenlänge haben. Das stellt man sicher, indem die Elektronen mit einer genau bestimmten Beschleunigungsspannung auf den Weg gebracht werden. Damit haben Sie eine ganz bestimmte kinetische Energie, einen ganz bestimmten Impuls p und nach der Formel $\lambda = h/p$ von de Broglie auch eine ganz bestimmte Wellenlänge. Bei der Erzeugung von „Elektronenwellen“ greifen wir also merkwürdigerweise wieder auf das Bild des Elektrons *als Teilchen* zurück, das eine ganz bestimmte Ladung $-e$ hat und deswegen von einer Beschleunigungsspannung U mit einer kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = eU$ versehen wird, die wegen der ganz bestimmten Masse m_e einem ganz bestimmten Impuls p entspricht ($E_{\text{kin}} = p^2/2m_e$), der dann die de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$ liefert. Als Welle interferiert das Elektron dann munter vor sich hin und wird auf dem Schirm registriert – aber wie und als was?

Im Versuch *Elektronenbeugung* sieht man auf dem Leuchtschirm helle und dunkle Bereiche, die die Wellennatur der Elektronen belegen. Aus der Beobachtung mit bloßem Auge kann man aber nicht entscheiden, wie diese genau entstehen, denn in jedem Augenblick fällt eine sehr große Zahl von Elektronen (oder eine sehr starke Elektronenwelle?) auf den Schirm und bringt ihn zum Leuchten. Es gibt aber genauere Experimente, die mit sehr kleinen Zahlen von Elektronen arbeiten und einen Einblick in die Details ermöglichen. Die verwendeten Detektoren müssen dazu allerdings viel empfindlicher (und damit leider auch viel teurer und schwieriger zu handhaben) sein als der Leuchtschirm in unserem Versuch.

Man sieht dann wieder ein Interferenzmuster aus hellen und dunklen Bereichen, diese sind aber zusammengesetzt aus mehr oder weniger dicht liegenden hellen Punkten. Jeder solche Punkt entspricht einem einzelnen Elektron, das auf den Detektor trifft. Man kann die Anzahl der eintreffenden Elektronen so weit reduzieren, dass man die hellen Lichtpunkte einzeln auf dem Detektor auftauchen sieht. Zunächst erscheinen sie an scheinbar zufälligen Stellen und erst nach längerer Zeit bildet sich langsam ein Streifenmuster heraus. Im Internet gibt es mehrere kurze Videos von solchen Experimenten mit Elektronen an einem Doppelspalt⁵. Ein Video stammt aus den Forschungslabors eines japanischen Elektronikunternehmens (<https://rdg.ext.hitachi.co.jp/rd/moviee/doubleslite.mpeg>), ein weiteres findet sich bei <https://www.youtube.com/watch?v=ZqS8Jjkk1HI>. Falls diese Links nicht mehr funktionieren sollten, suchen Sie mit einer geeigneten Suchmaschine z.B. nach „electron double slit experiment“. Das japanische Video zeigt ein 30 Minuten langes Experiment; der Anfang ist im Originaltempo aufgenommen, später folgen Aufnahmen mit Zeitraffer.



Elektronen, die sich *als Wellen bewegen*, werden also offenbar *als Teilchen registriert*. Ihre Eigenschaften als Teilchen (Masse, Ladung) sind auch wichtig dafür, eine bestimmte Wellenlänge einzustellen, wie wir oben sehen konnten. Die beiden Aspekte, Wellen und Teilchen, sind miteinander *untrennbar verbunden*. Diese Tatsache bezeichnet man als **Dualismus von Welle und Teilchen**.

Wann gibt es Interferenz und wann nicht?

Wie ungewöhnlich die Situation ist, macht man sich klar, wenn man noch einmal eins der oben genannten Videos in Ruhe anschaut. (Tun Sie das ruhig jetzt.) Wenn die Elektronen nacheinander auf dem Detektor eintreffen, befindet sich zu jedem Zeitpunkt *höchstens ein Elektron in der Apparatur*. Trotzdem entsteht am Ende ein Interferenzmuster. Es ist also auf keinen Fall so, dass die Elektronen „miteinander interferieren“, da jedes Elektron erst losfliegt, wenn das vorige Elektron seine Reise längst im Detektor beendet hat. Trotzdem entsteht ein Interferenzmuster! Interferiert das Elektron „mit sich selbst“, indem es sich aufspaltet und durch beide Spalte geht? – Es hat noch

⁵Die Apparatur ist erheblich trickreicher als nur eine Wand mit zwei Spalten, das Ergebnis entspricht aber genau einem Doppelspalt für Elektronen. Wer das Experiment wiederholen möchte, benötigt zunächst einmal ein Elektronenmikroskop, das dann noch umgebaut werden muss.

niemand ein halbes Elektron beobachtet. Da das Elektron wegen seiner Ladung Licht streut, kann man mit einer Lichtquelle in der Nähe der Spalte feststellen, durch welchen der beiden Spalte es gegangen ist. Wenn man das aber tut, erhält man kein Interferenzmuster. Man hat sozusagen das Elektron dazu gezwungen, sich zu bewegen „wie ein Teilchen“ und damit seine Welleneigenschaften ausgeschaltet. Allgemeiner gilt: *Interferenz tritt bei einem quantenmechanischen Prozess zwischen einem Anfangszustand und einem Endzustand immer nur dann ein, wenn der Prozess auf verschiedenen Wegen ablaufen kann und wenn keine Information darüber vorliegt, welchen Weg der Prozess genommen hat.* Sobald solche „welcher-Weg-Information“ vorliegt, gibt es keine Interferenz mehr.

Was interferiert also in der Quantenmechanik? – Von einem technisch-mathematischen Standpunkt ist das einfach: Die Wellenfunktionen für die verschiedenen Möglichkeiten überlagern (addieren) sich, genauso wie die elektromagnetischen Felder bei der Interferenz von Lichtwellen, und das führt dazu, dass an manchen Stellen das elektromagnetische Feld Null ist (Dunkelheit) bzw. die Wellenfunktion Null ist (keine Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu finden). Etwas philosophischer ausgedrückt, könnte man sagen, die verschiedenen Möglichkeiten, die das Teilchen hat, interferieren miteinander, aber nur solange man dem Teilchen auch alle diese Möglichkeiten lässt, also nicht versucht, „welcher-Weg-Informationen“ zu messen.

Wie man solche Informationen ermitteln kann, werden wir weiter unten am Beispiel der Interferenz von (klassischem) Licht beim Versuch *Mach-Zehnder-Interferometer* sehen. Interferenzen einzelner Quantenobjekte untersucht der Versuch *Doppelspalt mit einzelnen Photonen*. Photonen sind zwar auf den ersten Blick etwas abstrakter als Elektronen, aber experimentell dafür wesentlich angenehmer zu handhaben, da sie nicht geladen sind; darum gibt es den Doppelspalt mit einzelnen Elektronen im *Treffpunkt Quantenmechanik* nicht.

Ganz ähnlich wie in unserem Versuch *Elektronenbeugung* haben Davisson und Germer schon 1927 nachgewiesen, dass Elektronen sich durch Wellen beschreiben lassen. Sie richteten einen Elektronenstrahl auf einen Nickelkristall und stellten fest, dass die Elektronen in ganz bestimmten Richtungen besonders stark von der Kristalloberfläche reflektiert wurden. Ihre Analyse ergab, dass sich die Elektronen wie Wellen verhielten, deren Wellenlänge, wie sie als vorsichtige Wissenschaftler schrieben, „in akzeptabler Übereinstimmung mit ... der Wellenmechanik“ war.

Die Interferenzphänomene der Quantenmechanik zeigen klar, dass der in der klassischen Mechanik so wichtige Begriff der *Bahn eines Teilchens* in der Quantenmechanik sinnlos ist. Das zeigt sich am klarsten, wenn es mehrere klassisch klar unterscheidbare Alternativen gibt, etwa die beiden Spalte im Doppelspaltexperiment. Warum für „klassische Situationen“, etwa die Bewegung von makroskopischen Objekten, die klassische Mechanik trotzdem eine (sehr) sinnvolle Beschreibung bietet, werden wir sehen, wenn wir uns im Abschnitt 2.6 etwas näher mit dem wichtigen Begriff der Unschärfe befassen. Die Unschärfe und die Sinnlosigkeit des Bahnbegriffs führen auch dazu, dass man einzelne gleichartige quantenmechanische Teilchen (etwa Elektronen oder Neutronen oder Protonen) nicht voneinander unterscheiden kann. (Die verschiedenen Teilchensorten kann man schon unterscheiden, aber eben nicht zwei Elektronen voneinander.) Das ist keine Frage der Messgenauigkeit, sondern etwas Prinzipielles und hat sehr wichtige Folgen für den Aufbau der Materie.

Doppelspalt mit Einzelphotonen

Der Versuch *Doppelspalt mit einzelnen Photonen* im *Treffpunkt Quantenmechanik* ermöglicht es Ihnen, die Interferenzmuster für Einzel- und Doppelspalt (Abbildungen 2.15 und 2.16) selbst auszumessen, und zwar auf zwei verschiedene Arten.

Mit einer *starken* Lichtquelle mit einer festen Wellenlänge (einem Laser) wird der Doppelspalt beleuchtet und man kann jeden der beiden Spalte verschließen oder auch beide offen lassen. Das Beugungsmuster wird dann aber nicht nur einfach qualitativ auf einem Schirm beobachtet, sondern quantitativ ausgemessen. Dazu dient ein Detektor hinter einem verschiebbaren schmalen Spalt an der Stelle, wo man einen Beobachtungsschirm aufstellen würde. Wenn man den Spalt in kleinen Schritten über das Interferenzmuster schiebt, kann man die Lichtintensität hinter diesem Spalt ausmessen und in einer Tabelle aufzeichnen. Auf diese Weise erhält man die Intensitätsverteilungen für „Spalt 1 offen“, „Spalt 2 offen“ und „beide Spalte offen“.

Das Ganze kann man dann noch einmal mit einer *schwachen* Lichtquelle (einer Glühbirne, mit niedriger Spannung betrieben) wiederholen. Um ein Interferenzmuster zu erhalten, wird eine bestimmte Wellenlänge aus dem kontinuierlichen Spektrum der Glühlampe herausgefiltert. Am Ende wird mit einem hochempfindlichen Detektor gezählt, wieviele Photonen pro Sekunde durch den verschiebbaren Beobachtungsspalt kommen. Mit einer akustischen Anzeige („cricket“, auf deutsch: Grille) kann man hörbar machen, wenn der Detektor ein⁶ Photon registriert und so leicht feststellen, wo viele oder wenige Photonen eintreffen. Die räumliche Verteilung der gemessenen und in einer Tabelle aufgezeichneten Photonenzahlen sollte am Ende Ähnlichkeit mit den Intensitätsverteilungen aus dem ersten Teil des Versuchs haben.

Spektrum (Plural: Spektren), Spektroskopie

Als **Spektrum** bezeichnet man die Gesamtheit der in einem Bereich zu beobachtenden Wellenlängen (oder Frequenzen) der elektromagnetischen Strahlung, zusammen mit ihren jeweiligen Intensitäten. Wenn in einem Bereich alle Wellenlängen auftreten können, bezeichnet man das Spektrum als **kontinuierlich**, z.B. bei der Wärmestrahlung eines heißen Objekts. Wenn nur ganz bestimmte Wellenlängen auftreten können, nennt man das Spektrum **diskret**. Das ist beispielsweise für reine chemische Elemente der Fall. Diskrete Spektren nennt man auch **Linienspektren**, benannt nach dem Bild von farbigen Linien auf dunklem Hintergrund, das sich in einem optischen Spektrometer zeigt. Durch Untersuchung solcher Linienspektren in der **Spektralanalyse** stellt man fest, welche chemischen Elemente die untersuchte Substanz enthält. Die Untersuchung von Spektren nennt man **Spektroskopie**.

Allgemeiner bezeichnet man auch die möglichen Werte der Energie eines Quantensystems als **Energiespektrum**.

Man sieht in diesem Versuch, dass sich auch Licht einerseits wie eine Welle verhält, indem es interferiert, und andererseits als Photon wie ein Teilchen an einer bestimmten

⁶Aufgrund der Eigenschaften einer thermischen Quelle wie der hier verwendeten Glühbirne werden Photonen gelegentlich auch paarweise erzeugt. Es handelt sich hier also nicht um ein Einzelphotonen-Experiment im ganz strengen Sinn. Lichtquellen, die *nur* einzelne, gut voneinander getrennte Photonen erzeugen, sind schwierig herzustellen.

Stelle des Beobachtungsschirms registriert wird. Erst die Verteilung einer sehr großen Zahl von registrierten Photonen liefert wieder das Interferenzmuster der Lichtwellen. Ebenso wie die Elektronen zeigen also auch die Photonen den *Welle-Teilchen-Dualismus*.

Das Mach-Zehnder-Interferometer: Wie man Interferenz verhindern kann

Wir diskutieren nun noch ein weiteres Interferenz-Experiment, bei dem die verschiedenen „Wege“ des Lichts sehr viel weiter voneinander getrennt sind als beim Doppelspalt, und bei dem man beobachten kann, wie die „welcher-Weg-Information“ die Interferenz beeinflusst. Es geht um den Versuch *Mach-Zehnder-Interferometer*.

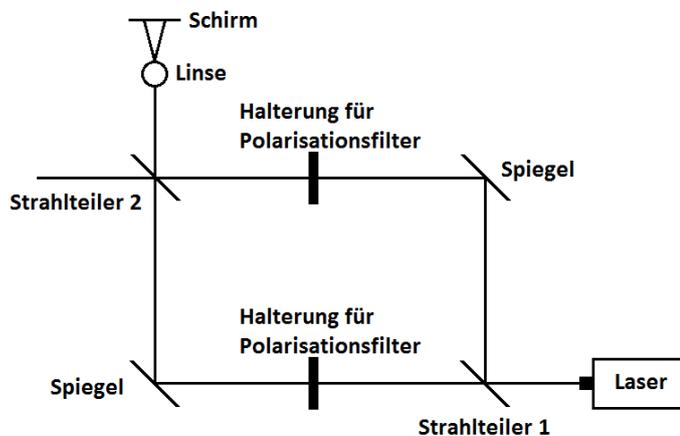


Abbildung 2.18: Aufbau eines Mach-Zehnder-Interferometers. Das Licht des Lasers wird durch den Strahlteiler 1 aufgeteilt und die beiden Teilstrahlen werden über zwei Spiegel am Strahlteiler 2 wieder zusammengeführt. Ein Teil des Lichts gelangt dann über eine Linse (nach oben) zum Beobachtungsschirm, das übrige Licht verlässt die Apparatur (nach links). (Grafik: Duffe)

Prinzipiell ist ein Mach-Zehnder-Interferometer ein einfaches Gerät. Es besteht aus einer Lichtquelle, zwei guten Spiegeln (die das Licht vollständig reflektieren), zwei schlechten Spiegeln (die das Licht teils reflektieren und teils durchlassen) und einem Beobachtungsschirm. Den schematischen Aufbau zeigt Abbildung 2.18. Die „schlechten Spiegel“ haben in der Physik den schöneren Namen „Strahlteiler“. Die in der Abbildung erwähnten Polarisationsfilter kommen erst später ins Spiel. Auf dem Beobachtungsschirm findet Interferenz zwischen den beiden Lichtwellen statt, die am ersten Strahlteiler getrennt wurden. Ob die Interferenz konstruktiv oder destruktiv ist, hängt wieder vom Gangunterschied zwischen den beiden Lichtwegen ab. Wenn der Gangunterschied sich um eine halbe Wellenlänge ändert, z.B. durch Verschieben eines Spiegels, wird aus konstruktiver Interferenz destruktive und umgekehrt. Da sichtbares Licht nur eine Wellenlänge λ von einigen 100nm hat, ist das Interferometer ein sehr empfindliches Gerät, mit dem man sehr genau die optischen Eigenschaften (Brechungsindex) einer Substanz bestimmen kann, die in einen der beiden Lichtwege eingebracht wird. Im *Treffpunkt Quantenmechanik* sind wir aber an anderen Fragen interessiert, die wir nun diskutieren wollen.

Wie schon gesagt, sieht man auf dem Beobachtungsschirm die Interferenz zwischen den beiden Wellenzügen, die die Apparatur auf unterschiedlichen Wegen durchlaufen

haben. Wenn alle Spiegel und Linsen richtig stehen, bildet sich ein Muster von hellen und dunklen Ringen, wie auf einer Zielscheibe. Wenn es im Zentrum der Ringe hell ist, herrscht dort konstruktive Interferenz. Etwas weiter außen haben die beteiligten Wellen dann etwas andere Wege durchlaufen und es kommt zu destruktiver Interferenz, und so weiter. Die Besonderheit des Mach-Zehnder-Interferometers gegenüber dem Doppelspalt besteht nun darin, dass man auf einfache Art die beiden Lichtwege „markieren“ kann, und damit unterscheiden, auf welchem Weg das auf dem Schirm eintreffende Licht dorthin gelangt ist. Dazu verwendet man die *Polarisation des Lichtes*, die im gleichnamigen Versuch im *Treffpunkt Quantenmechanik* im einzelnen untersucht werden kann.

Polarisation des Lichts

Elektromagnetische Wellen bestehen aus miteinander gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern, die sich in Raum und Zeit verändern. Bei einer monochromatischen (nur eine Frequenz bzw. Wellenlänge) ebenen Welle im freien Raum stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander und beide stehen senkrecht auf der Richtung, in der das Licht sich ausbreitet. Wenn das elektrische Feld nur in einer Richtung hin und her schwingt, spricht man von einer **linear polarisierten** Welle. Wenn man in Richtung der Wellenausbreitung schaut, kann man zwei grundsätzlich verschiedene Polarisationen (Schwingungsrichtungen) unterscheiden: „rechts und links“ (x -Polarisation) und „auf und ab“ (y -Polarisation). Alle komplizierteren Wellenformen kann man aus diesen Grundformen zusammensetzen.

Wir stellen uns nun zwei y -polarisierte Wellen vor, die mit einer halben Wellenlänge Gangunterschied zusammentreffen. Dann haben wir genau die in Abbildung 2.9 dargestellte Situation. Die elektrischen Felder der beiden Wellen sind überall genau entgegengesetzt gleich und heben sich auf; es gibt also destruktive Interferenz. Genauso ist es natürlich, wenn beide Wellen x -polarisiert sind; wieder gibt es destruktive Interferenz. Anders sieht es aus, wenn die eine Welle x -polarisiert und die andere y -polarisiert ist. Da die elektrischen Felder der beiden Wellen dann in zueinander senkrechte Richtungen zeigen, können sie sich niemals gegenseitig aufheben und es kann keine Interferenz stattfinden.

Dieses Verhalten gleich oder unterschiedlich polarisierter Wellen kann man mit dem Mach-Zehnder-Interferometer gut beobachten. Dazu bringt man in den Aufbau der Abbildung 2.18 Polarisationsfilter ein. Ein Polarisationsfilter besteht aus einer Substanz (meist eine spezielle Kunststoffolie), die nur Lichtwellen mit einer bestimmten Polarisation durchlässt. In der Regel sind Polarisationsfilter in einem Ring drehbar gelagert, so dass man die durchgelassene Polarisationsrichtung einstellen kann. Wenn man in beide Lichtwege Polarisationsfilter einbaut und diese beide in x -Richtung einstellt, wird man Interferenz beobachten; genauso, wenn man beide in y -Richtung einstellt. Wenn man nun aber einen der beiden Filter aus der y -Richtung in die x -Richtung dreht, wird das Interferenzmuster verschwimmen und der Schirm wird (mehr oder weniger) gleichmäßig ausgeleuchtet.

Wenn ein Polarisationsfilter in x -Richtung und das andere in y -Richtung eingestellt ist, haben wir die beiden Lichtwege durch die Polarisationsrichtungen markiert und

können sagen, welches Licht über welchen Weg gekommen ist. Wenn wir die beiden Filter allmählich wieder in die gleiche Orientierung drehen, löschen wir die „welcher Weg“-Information allmählich wieder aus und stellen die Interferenz allmählich wieder her.

Wir haben bis hierher das Verhalten des Lichts im Mach-Zehnder-Interferometer vollständig mit den Mitteln der klassischen Physik erklärt, indem wir über entgegengesetzte oder zueinander senkrechte elektrische Felder gesprochen haben. Das ist auch völlig korrekt, aber was hat all das mit Quantenmechanik zu tun? – Das wird klar, wenn wir uns vorstellen⁷, die Lichtintensität so weit zu reduzieren, dass zu jedem Zeitpunkt nur noch wenige Photonen in der Apparatur sind, im Extremfall nur ein einziges oder manchmal auch gar keins. Dann besitzen wir, je nach Stellung der Polarisationsfilter, entweder die „welcher Weg“-Information und damit entsteht (nach längerer Beobachtungszeit) kein Interferenzmuster, oder (wenn beide Polarisationsfilter in die gleiche Richtung eingestellt sind) wir haben keine Möglichkeit die Lichtwege zu unterscheiden und können deshalb die allmähliche Entstehung eines Interferenzmusters beobachten, genau wie in dem weiter oben besprochenen japanischen Experiment mit Elektronen.

Ein Photon geht keinen Weg

Am Ende dieses Abschnitts ist noch ein Warnhinweis zum Begriff „welcher Weg“-Information⁸ angebracht: Es ist sehr irreführend, sich ein Photon als „so etwas ähnliches wie ein Teilchen“ vorzustellen, das sich „auf einem Weg“ bewegt. Ein Photon ist eine bestimmte Menge Energie, die in einer bestimmten Schwingungsform des elektromagnetischen Felds steckt, und dieses elektromagnetische Feld ist überall im Raum. Im Gegensatz dazu ist ein Elektron oder ein anderes materielles Teilchen zwar infolge der Unschärferelation nicht perfekt im Raum lokalisiert, wie wir im Abschnitt 2.6 näher diskutieren werden, aber man kann durch die Wellenfunktion beispielsweise seinen mittleren Ort mit einer gewissen (Un-) Genauigkeit definieren. Für ein Photon kann man keine sinnvolle Wellenfunktion definieren und damit auch keinen Ort. Ein Photon zeigt seine Teilchennatur erst, wenn es eigentlich schon nicht mehr da ist, weil ein Detektor es an einem bestimmten Ort registriert hat.

2.6 Unschärfe und die Folgen

Um über Unschärfe diskutieren zu können, sollten wir erst einmal die Begriffe schärfen und genau festlegen, was mit Unschärfe eigentlich gemeint sein soll. Oft kann man eine Größe nicht genau bestimmen. Das kann verschiedene Gründe haben: Die genaue Messung kann schwierig sein, oder die Größe ist von Anfang an nicht eindeutig festgelegt, wie etwa das Alter oder die Körpergröße einer ganzen Gruppe von Menschen, oder die Höhe der Bäume in einem Wald. In solchen Fällen erhält man bei einer wiederholten Messung einer Größe x eine Verteilung von Messwerten, die mehr oder weniger weit verstreut liegen.

⁷Praktisch geht das mit dem einfachen Beobachtungsschirm leider nicht, da unsere Augen nicht empfindlich genug sind, einzelne Photonen zu registrieren.

⁸„Welcher Weg“ ist eine Übersetzung aus dem Englischen, wo „which way“ nicht nur „auf welchem Weg im Raum“, sondern allgemeiner auch „auf welche Art“ bedeutet.

Etwas Statistik: Mittelwerte und Standardabweichungen

Man kann dann in der üblichen Weise einen Durchschnittswert bilden; in der Wissenschaft spricht man vom **Mittelwert** und bezeichnet ihn mit $\langle x \rangle$.⁹ Oft wüsste man zusätzlich noch gern, mit welcher Genauigkeit der Mittelwert festgelegt ist, also, ob die vielen Messwerte alle sehr eng um den Mittelwert herum liegen oder weit verstreut. Dazu bestimmt man für jeden einzelnen Messwert x die Abweichung vom Mittelwert, also $x - \langle x \rangle$ und quadriert diese Größe. Dann bildet man den Mittelwert dieser quadratischen Abweichung, also $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$. Das Quadrieren bewirkt, dass Abweichungen nach oben und nach unten sich nicht gegenseitig aufheben können. Die so berechnete „mittlere quadratische Abweichung“ nennt man auch **Varianz**, und je größer sie ist, desto breiter streuen die einzelnen Messwerte um den Mittelwert.

Die Varianz kann man aber nicht unmittelbar mit dem Mittelwert vergleichen: Wenn x beispielsweise eine Länge ist, dann ist die Varianz von x durch das Quadrieren eine Fläche, also etwas ganz anderes. Um wieder eine Länge zu erhalten, zieht man einfach die Wurzel aus der Varianz und nennt diese Größe **Standardabweichung** von x , in Formeln:

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}.$$

Diese Größe ist genau das, was in der Physik als die **Unschärfe** von x bezeichnet wird. Die in der Physik übliche Schreibweise für die Unschärfe benutzt den griechischen Großbuchstaben Delta; dann haben wir also

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

(Die beiden Formen $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ und $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ der Varianz sind mathematisch äquivalent.)

Mittelwerte und Schwankungen

Mittelwerte sind das, was man umgangssprachlich meist als „Durchschnitt“ oder „Durchschnittswert“ bezeichnet, und jeder weiß intuitiv, wie man etwa die Durchschnittsnote einer Klausur bestimmt. Das mittlere Alter der 20 Personen in einem Physik-Leistungskurs könnte z.B. 16,8 Jahre betragen, genauso wie möglicherweise das mittlere Alter von 20 Menschen, die an einem Samstagvormittag nacheinander ein Kaufhaus betreten. Wenn wir das Alter der ersten Person A_1 nennen, das der zweiten Person A_2 usw., dann ist der **Mittelwert** des Alters für 20 Personen einfach

$$\langle A \rangle = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}.$$

Die spitzen Klammern $\langle \dots \rangle$ sind eine übliche Art, Mittelwerte zu bezeichnen.

Die beiden Personengruppen (Physik-LK und Kaufhaus) werden sicher unterschiedliche Altersverteilungen haben, auch wenn $\langle A \rangle$ für beide Gruppen gleich ist. Im Kaufhaus werden auch ältere Leute und Kleinkinder sein, also Personen mit großen Abweichungen vom Mittelwert. Eine Größe, die die Stärke der Abweichungen vom Mittelwert beschreibt, ist die **Varianz** (die

⁹Es gibt noch andere Schreibweisen für den Mittelwert, wir verwenden aber nur die mit den spitzen Klammern.

mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert):

$$\text{Var}(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

(Man verwendet das Quadrat der Abweichung vom Mittelwert, damit sich nicht die Abweichungen nach oben und unten gegenseitig aufheben. Die beiden angegebenen Formen der Varianz sind äquivalent. Das leuchtet nicht unmittelbar ein, lässt sich aber nachrechnen.)

Um die Abweichungen sinnvoll mit dem Mittelwert des Alters vergleichen zu können, verwendet man die Wurzel aus der Varianz; das ist die **Standardabweichung** $\sigma(A)$

$$\sigma(A) = \sqrt{\text{Var}(A)} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Die Standardabweichung $\sigma(A)$ (σ : griechischer Buchstabe sigma) ist das, was man meint, wenn man sagt, das Durchschnittsalter des Physik-LKs sei $16,8 \pm 0,8$ Jahre.

Wenn in der Physik von **Unschärfe** gesprochen wird, ist immer die Standardabweichung gemeint. Oft bezeichnet man die Unschärfe mit dem großen griechischen Delta; Δx bedeutet dann die Standardabweichung des Orts x : $\Delta x = \sigma(x)$, und ähnlich für den Impuls p und andere Größen.

Wie unscharf sind Wellen?

Nachdem wir festgelegt haben, was genau Unschärfe ist, gehen wir noch einmal zurück zu den klassischen Wellen im Abschnitt 2.2, wo wir schon einmal eine Beziehung zwischen der Unschärfe der Wellenlänge und der des Orts bemerkt hatten: Die Welle in der Abbildung 2.7 hatte einen ziemlich gut festgelegten Ort, aber eine nicht genau zu messende Wellenlänge, die in der Abbildung 2.6 hatte dagegen eine sehr genau festgelegte Wellenlänge, war aber räumlich weit ausgedehnt und hatte damit keinen genau bestimmbar Ort. Das waren keine speziell konstruierten Fälle, sondern Beispiele für eine allgemeine mathematische Gesetzmäßigkeit.

Wir verzichten hier auf die Details der nötigen höheren Mathematik, deuten aber an, worum es geht und warum es etwas mit Quantenmechanik zu tun hat. Der Einfachheit halber sprechen wir wieder nur über Wellen in einer Dimension. In mehr als einer Dimension geht alles genauso, erfordert nur mehr Schreibarbeit und bietet mehr Möglichkeiten sich zu verrechnen.

Amplitude

Die **Amplitude** ist die maximale Auslenkung einer Welle, also z.B. bei einer Wasserwelle die Höhe des Wellenbergs über der ruhigen Wasseroberfläche. Außer der Amplitude ist auch die **Phase** einer Welle wichtig, die bestimmt, wo z.B. genau die Wellenberge liegen.

Bei Überlagerungen von Wellen sind sowohl die Amplituden als auch die Phasen der Teilwellen wichtig, Stichwort Interferenz.

Bei einer Überlagerung von mehreren quantenmechanischen Wellenfunktionen spricht man ebenfalls von den Amplituden der verschiedenen Wellenfunktionen und meint damit die jeweiligen (als komplexe Zahlen ausgedrückten) Anteile.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** z wird aus zwei reellen Zahlen x und y nach der Vorschrift

$$z = x + iy$$

gebildet. Dabei ist i die **imaginäre Einheit** mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

Man nennt x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z . Komplexe Zahlen kann man in einer Ebene mit x und y als Koordinaten in der üblichen Art und Weise darstellen (Gauß'sche Zahlenebene). Die Größe

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

bezeichnet man als **Betragsquadrat** von z . Der Betrag $|z|$ der Zahl z gibt dann den Abstand zwischen z und dem Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene an.

Zum Warmwerden berechne man einfach einmal das Produkt von $3 + 4i$ und $3 - 4i$. Tipp: Das Ergebnis ist reell und eine Quadratzahl.

Man kann *jede* beliebige Wellenform als Überlagerung von einfachen sinusförmigen Wellen wie der in Abbildung 2.2 rechts darstellen. Dazu braucht es mehrere (oder auch viele) Wellen mit unterschiedlichen Wellenlängen, Amplituden und Phasenlagen. Für die mathematische Schreibarbeit (und für den Zusammenhang zur Quantenmechanik) ist es zweckmäßiger, nicht die Wellenlänge λ selbst, sondern ihren Kehrwert zu verwenden; das wäre also die Anzahl der Wellen pro Meter. Aus mathematisch-technischen Gründen multipliziert man diese Größe noch mit 2π , nennt das Ganze **Wellenzahl** und bezeichnet es mit dem Buchstaben k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Nun kann man für alle unterschiedlichen Werte von k festlegen, welche Amplitude und welche Phasenlage die Welle mit der Wellenzahl k haben muss, um eine gewünschte Wellenform als Überlagerung all dieser verschiedenen Wellen darzustellen. Wie das genau geht, lernt jede Physikerin im 3. Semester (jedenfalls in Dortmund) unter dem Namen *Fourier-Analyse*. Zu jeder Wellenform im Raum x gibt es ein eindeutig bestimmtes Muster von Amplituden (und Phasenlagen) der verschiedenen Wellen mit Wellenzahl k . Man kann dann an vielen Beispielen sehen, dass eine in der räumlichen Koordinate x schmale Wellenform einer breiten Verteilung der Amplituden in der Wellenzahl k entspricht, und umgekehrt. Ein einfaches Beispiel für zwei Fälle zeigt die Abbildung 2.19. In beiden Fällen wurden 11 Wellen mit bestimmten Wellenzahlen k

überlagert. Die verwendeten Werte von k sind in beiden Fällen gleich, aber die Amplituden der 11 Wellen sind unterschiedlich. Die Amplituden sind durch die Punkte in Abbildung 2.19 dargestellt: Der Wert der Amplitude ist nach oben aufgetragen, der zugehörige k -Wert nach rechts/links. Die durchgezogenen Linien zeigen¹⁰ die Wellenform in der Raumkoordinate x . Man sieht klar, dass das Muster der Amplituden im unteren Bild deutlich schmäler („schärfer“) ausfällt als im oberen, während gleichzeitig die Wellenform viel breiter („unschärfer“) ist.

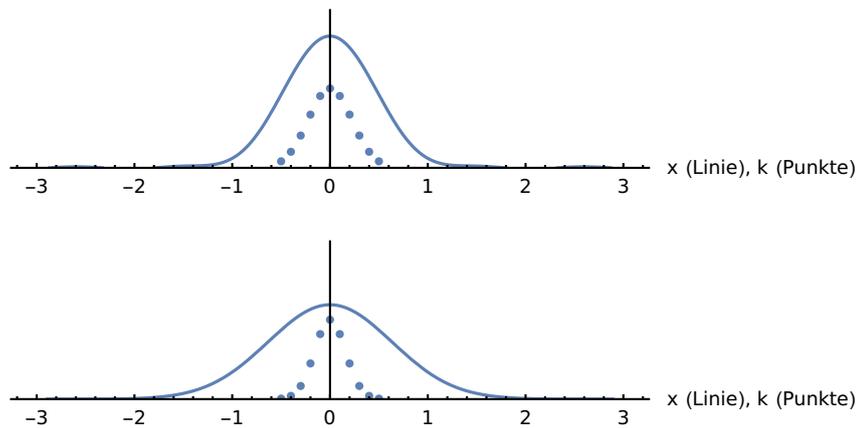


Abbildung 2.19: Zwei Wellenformen (durchgezogene Linien) in einer Dimension x . Beide entstehen durch Überlagerung von 11 Wellen mit bestimmten Wellenzahlen k . Sowohl die Koordinate x als auch die Wellenzahl k sind entlang der horizontalen Achse aufgetragen. Die verwendeten Wellenzahlen sind für beide Wellenformen gleich, aber die zu diesen Wellenzahlen gehörigen Amplituden (Höhe der Punkte über der horizontalen Achse) sind unterschiedlich. Eine breite Verteilung der k -Amplituden (große Standardabweichung von k , oben) führt zu einer schmalen x -Wellenform (kleine Standardabweichung des Orts x) und eine schmalere Verteilung in k zu einer breiteren Wellenform in x (unten). Es gibt also eine Beziehung zwischen den Unschärfen (Standardabweichungen) in x und in k für „ganz normale“ (klassische) Wellen. (Grafik: Stolze)

Die Unschärferelation ist eigentlich ein alter Hut...

Wie schon im Abschnitt 2.2 erwähnt, ist die in Abbildung 2.19 illustrierte Unschärfe-Beziehung zwischen dem Ort x und der Wellenzahl k keineswegs neu. Wenn man die Welle nicht im Raum (zu einem festen Zeitpunkt) betrachtet, sondern in der Zeit (an einem festen Ort), dann muss man den Ort x durch die Zeit t ersetzen und die Wellenzahl k durch die Frequenz f (genauer: durch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, ist aber nicht so wichtig). Dann sieht man: Um ein besonders kurzes Signal zu übertragen, benötigt man ein besonders breites „Band“ von Frequenzen. Das ist eines der wichtigsten Gesetze der Nachrichtenübertragung und jedem Ingenieur der Elektrotechnik bekannt.

Wenn Sie besonders kurze Signale übertragen können, können Sie besonders viele Signale pro Sekunde übertragen. Darum braucht der 5G-Mobilfunk viel höhere Frequen-

¹⁰In den beiden Teilbildern haben die horizontale Achse für die Koordinate x und die Wellenzahl k aus Darstellungsgründen jeweils unterschiedliche Maßstäbe; zwischen den beiden Teilbildern unterscheiden sich die Maßstäbe aber nicht. Alle Wellen sind Cosinuswellen mit gleicher Phasenlage. Eine Cosinuswelle mit $k = 0$ (also mit unendlicher Wellenlänge) ist einfach ein konstanter Beitrag, ohne den die Wellenform nach außen hin nicht auf Null abfallen würde. Für Experten: Da hier nur endlich viele k -Werte in gleichen Abständen verwendet werden, wiederholt sich die Wellenform auf der x -Achse in regelmäßigen Abständen.

zen und ein breiteres Frequenzband als der 4G-Mobilfunk, und mit 5G können Sie wegen der hohen Datenübertragungsrate dann irgendwo im Wald auf Ihrem Smartphone Spielfilme in allerfeinster Auflösung anschauen, ohne dass es ruckelt – vorausgesetzt, irgendjemand stellt genug 5G-Sender in den Wald.

Die Abbildung 2.19 macht deutlich, dass man für die dargestellten Wellenformen eine Ortsunschärfe Δx definieren kann, und für die Amplitudenverteilungen eine „Wellenzahlunschärfe“ Δk und man wird für jedes durchgerechnete Beispiel finden, dass das Produkt $\Delta x \Delta k$ eine Konstante ist, die etwa im Bereich von Eins liegt. Das ist, wie gesagt, altbekannt und regt niemanden auf...

...aber es wird spannend, wenn der Impuls ins Spiel kommt

...und nun (1924) kommt Monsieur le Prince Louis Victor de Broglie daher und macht den Vorschlag, dass man einem Teilchen mit dem Impuls p eine Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$ zuordnen solle, um die Quantenphysik zu beschreiben. Dann ist doch der Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k,$$

also proportional zur Wellenzahl! (Mit der durch 2π dividierten Planck-Konstanten \hbar als Proportionalitätskonstante.) Damit wird aus der altbekannten Orts-Wellenzahl-Unschärfebeziehung die **Orts-Impuls-Unschärfebeziehung**, über die sich manche Leute seit ungefähr 100 Jahren aufregen:

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar.$$

(Das Zeichen \sim bedeutet hier „ganz grob in der Gegend von“.)

Wenn man auf dem geschilderten Weg zur Unschärferelation kommt, sieht man nicht so recht, was daran aufregend sein soll. Man sollte dabei aber nicht unterschätzen, wie bahnbrechend und aufregend die Idee ist, dass Impuls und Wellenlänge etwas miteinander zu tun haben sollen. Weil die Unschärferelation so wichtig ist, wollen wir sie nun auch noch in der präzisen Form aufschreiben, in der sie sich mathematisch beweisen¹¹ lässt:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Dabei ist die Konstante $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ so winzig, dass eine unmittelbare Überprüfung der Unschärfebeziehung zwischen Ort und Impuls eines Teilchens in einem einfachen Labor wie dem *Treffpunkt Quantenmechanik* nicht möglich ist.

Unschärfe in der Wellenwanne

Ein einfaches Experiment mit der Wellenwanne zeigt, dass schon in der klassischen Physik Unschärfebeziehungen am Werk sind, nur nennt man sie dort üblicherweise nicht so. Wenn man in der Wellenwanne ebene Wellen erzeugt und diese durch einen *breiten* Spalt laufen lässt, dann breitet sich hinter dem Spalt ein gerades Wellenbündel aus. Macht man den Spalt schmaler, dann wird aus dem geraden Wellenbündel eine Art Fächer, der sich um so weiter öffnet, je schmaler der Spalt ist.

¹¹Details: Physikstudium, 4. Semester.

Im Abschnitt 2.5 haben wir analysiert, wie das Beugungsmuster von Licht hinter einem einzelnen Spalt (Abbildung 2.15) zustande kommt. Das Ergebnis war einfach: Die Breite des Beugungsmusters ist umgekehrt proportional zur Breite des Spalts.

Wenn wir an das Huygens'sche Prinzip (Abschnitt 2.3) denken, dass von jedem Punkt einer Wellenfront aus kugelförmige (kreisförmige) Elementarwellen ausgehen und die neue Wellenfront bilden, dann gibt die Spaltbreite die Unschärfe im Ort (in „Querrichtung“) an, von dem die Elementarwellen ausgehen. Die Breite des „Wellenfächers“ hinter dem Spalt in der Wellenwanne oder des Beugungsmusters auf dem Beobachtungsschirm beim Experiment mit Licht ist ein Maß dafür, wie ungenau die Richtung festgelegt ist, in der die Wellen sich hinter dem Spalt ausbreiten. Bei Licht mit einer bestimmten Wellenlänge ist der *Betrag* des Impulses genau festgelegt, die Richtung aber nicht; die Impulskomponente in „Querrichtung“¹² ist also unscharf. Wieder sehen wir, dass es eine Verbindung zwischen der Wellennatur eines Vorgangs und der Unschärferelation gibt. Damit ist klar, dass auch die bei Elektronen oder anderen Teilchen beobachteten Beugungseffekte in einem engen logischen Zusammenhang zur Unschärferelation stehen.

Es gibt nicht nur eine Unschärfebeziehung zwischen Ort und Impuls, sondern generell zwischen *jedem* Paar von physikalischen Größen, die sich bei Messungen „gegenseitig stören“. Wir kommen im Abschnitt 3.2 noch einmal darauf zurück. Die Orts-Impuls-Unschärferelation ist wegen des Zusammenhangs zwischen Impuls und Wellenlänge und wegen der klassischen Bezüge zu Überlagerungen von Wellen besonders gut anschaulich zu diskutieren. Für die allgemeinere Version der Unschärferelation gilt, wie so häufig: Je allgemeiner, desto abstrakter.

Bedeutung der Unschärferelation

Wenn wir daran denken, wie winzig die für die Unschärferelation maßgebliche Konstante \hbar ist, fragen wir uns, warum diese Beziehung überhaupt irgendeine praktische Bedeutung haben soll. In der Tat muss der Torwart beim Elfmeter sich keinerlei Gedanken über die Unschärferelation machen, wenn er sich fragt, wohin der Ball wohl fliegen wird. Da sind ganz andere Faktoren wichtig, die nichts mit Quantenmechanik zu tun haben. Für (sehr viel) kleinere Objekte als Fußbälle ist die Unschärferelation aber „überlebenswichtig“.

Um das Jahr 1900 wurde nach und nach klar, dass Atome aus einem sehr kleinen positiv geladenen Kern bestehen, der fast die gesamte Masse des Atoms enthält, sowie aus einigen sehr leichten negativ geladenen Elektronen. Die Anziehungskraft zwischen entgegengesetzten Ladungen hält das ganze Gebilde zusammen. Da diese Anziehungskraft dem gleichen Abstandsgesetz gehorcht (proportional zu $1/\text{Quadrat}$ des Abstands) wie die Gravitationskraft zwischen Himmelskörpern, könnte man sich vorstellen, dass die Elektronen den Kern umkreisen wie die Planeten die Sonne.

Diese Vorstellung ignoriert allerdings den entscheidenden Unterschied, dass die Elektronen im Gegensatz zu den Planeten elektrisch geladen sind, und elektrisch geladene Teilchen auf einer solchen Umlaufbahn permanent elektromagnetische Wellen und damit Energie abstrahlen, wie kleine Antennen. Das würde innerhalb von Mikrosekundenbruchteilen dazu führen, dass die Elektronen ihre kinetische Energie verlieren und

¹²Die Komponente in „Längsrichtung“ ist natürlich auch unscharf, aber die Längs-Unschärfe ist für die übliche Situation in Beugungsexperimenten, mit sehr kleinen Beugungswinkeln, sehr viel kleiner als die Quer-Unschärfe.

auf einer spiralförmigen Bahn in den Kern stürzen. Atome, so wie wir sie kennen, und damit unsere gesamte Welt, würden zusammenbrechen.

Das war den Physikern um 1900 natürlich auch klar und sie fragten sich, warum diese Form des Weltuntergangs nicht schon längst stattgefunden hatte. Niels Bohr machte dann die Annahme, dass die Elektronen sich – warum auch immer – auf ganz bestimmten Bahnen doch stabil bewegen konnten und entwickelte so das Bohrsche Atommodell, das in der Tat viele Beobachtungen richtig erklären konnte.

Die Unschärfe verhindert den Weltuntergang

Diese Vorstellung hielt sich bis zur Entwicklung der Quantenmechanik in den 1920er Jahren, in der klar wurde, dass es die Unschärferelation ist, die uns vorm Weltuntergang bewahrt. Wie das geht, betrachten wir der Einfachheit halber an einem Wasserstoffatom, das aus einem Proton als Kern und einem Elektron besteht. Wenn das Elektron auf den Kern gestürzt wäre, dann wüssten wir gleichzeitig ziemlich genau, wo es ist (nämlich am Kern, dessen Durchmesser 100.000 mal kleiner ist als der des Atoms) und wie schnell es sich bewegt (nämlich gar nicht, sofern wir annehmen, dass der Kern sich nicht bewegt). Das wäre aber ein Widerspruch zur Unschärferelation, denn wir hätten dann sowohl den Ort als auch den Impuls des Elektrons festgelegt.

Wenn wir nun annehmen, dass der Ort des Elektrons nur mit einer Unschärfe Δx bekannt ist, dann ist Δx auch die Größenordnung des Abstands zwischen dem Kern und dem Elektron. Die potentielle Energie des Elektrons im Anziehungsfeld des Kerns ist dann proportional zu $-\frac{1}{\Delta x} < 0$. Der negative Wert bedeutet, dass wir Energie aufbringen müssten, um das Elektron vom Kern wegzuziehen.

Wegen der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ist dann $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ und für die kinetische Energie erwarten wir etwas in der Gegend von $\frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} > 0$. (Wie schon öfters, ist unsere „Rechnung“ hier nur sehr grob.)

Die Gesamtenergie, also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, sollte negativ sein, da wir einen gebundenen Zustand des Atoms erwarten, in dem das Elektron seinen Kern nicht „freiwillig“ (also ohne zusätzlichen Energieaufwand) verlässt. Den „am festesten gebundenen“ Zustand erreicht man, indem man Δx so wählt, dass die Gesamtenergie minimal wird. Wenn man das tut, erhält man Δx in der Größenordnung von 10^{-10} m und eine Gesamtenergie in der Größenordnung von -10eV ¹³. Genauere Angaben sollte man bei einer so groben Rechnung prinzipiell nicht machen; diese Zahlen stimmen aber gut mit der Realität überein.

Wir halten fest: Ohne Unschärferelation keine Stabilität der Materie. Der Nobelpreisträger Richard Feynman schreibt dazu in seinen „Vorlesungen über Physik“: *Also verstehen wir jetzt, warum wir nicht durch den Fußboden fallen. Beim Gehen drücken unsere Schuhe, mit ihren Unmengen von Atomen, auf den Fußboden mit seinen Unmengen von Atomen. Um die Atome enger zusammenzuquetschen, müssten die Elektronen auf engeren Raum beschränkt werden und wegen der Unschärferelation müssten ihre Impulse im Mittel größer werden und das bedeutet hohe Energie; der Widerstand von Atomen gegen Kompression ist ein quantenmechanischer und kein klassischer Effekt.*

¹³Ein Elektronvolt (eV) ist die Energie, die ein Elektron aufnimmt, wenn man es mit einer Spannung von einem Volt beschleunigt. $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$ ist die typische Energie, die bei atomaren oder molekularen Prozessen umgesetzt wird.

Es wird noch interessanter, wenn man nicht nur, wie eben, ein einziges Elektron betrachtet, sondern mehrere oder viele. Die quantenmechanische Unschärfe erklärt dann den Aufbau von Atomen, das Periodensystem der chemischen Elemente und die Tatsache, dass es unter den vielen existierenden Substanzen Isolatoren, Metalle und Halbleiter gibt. Aber eins nach dem anderen!

Wegen der Unschärfe kann man zwei Elektronen nicht unterscheiden

Wegen der Unschärfe ist der Begriff der *Bahn* eines Teilchens in der Quantenmechanik sinnlos, während in der klassischen Mechanik die Bestimmung der Bahn mithilfe der Bewegungsgesetze von Newton gerade das Ziel ist. Vergleichen wir nun einmal einen Wechselwirkungsprozess zwischen zwei klassischen Teilchen mit dem zwischen zwei quantenmechanischen Teilchen (Abbildung 2.20). In beiden Fällen bewegen sich die Teilchen von links nach rechts. Am Anfang sind sie weit voneinander entfernt, dann kommen sie einander so nahe, dass sie Kräfte auf einander ausüben und am Ende sind sie wieder weit voneinander entfernt.

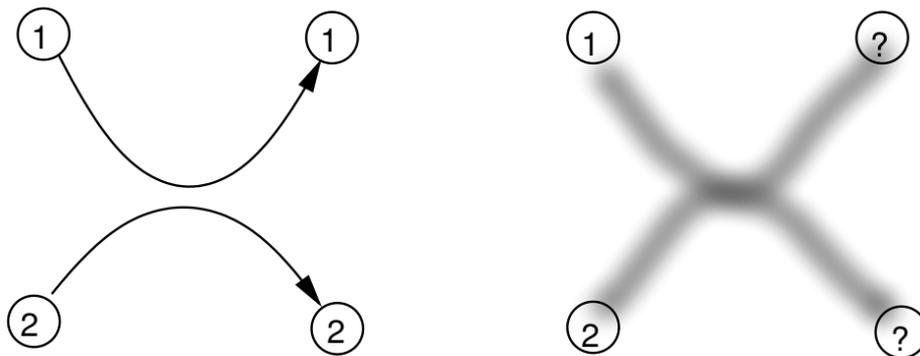


Abbildung 2.20: Ein Wechselwirkungsprozess zwischen zwei Teilchen. Am Anfang und Ende sind die Teilchen weit voneinander entfernt, dazwischen kommen sie sich nahe. Links: klassische Teilchen, rechts: quantenmechanische Teilchen. (Grafik: Stolze)

Im klassischen Fall ist jederzeit klar, welches Teilchen welches ist, da man die Bahnen voneinander unterscheiden kann: Das Teilchen, das am Anfang oberhalb des anderen war, ist auch am Ende das obere. Im quantenmechanischen Fall dagegen vermischen sich die „Wahrscheinlichkeitswolken“ der beiden Teilchen, und wenn es sich um gleichartige Teilchen (z.B. zwei Elektronen) handelt, dann ist am Ende völlig unklar, ob die Teilchen die Positionen getauscht haben oder nicht. Gleichartige quantenmechanische Teilchen sind prinzipiell **ununterscheidbar**; man spricht auch von **identischen** Teilchen. Die Frage, ob zwei identische Teilchen die Positionen getauscht haben, ist sinnlos, und die quantenmechanische Beschreibung von Systemen aus zwei Teilchen darf deshalb keinerlei Möglichkeit bieten, zwei gleichartige Teilchen zu unterscheiden.

Im Abschnitt 2.4 hatten wir schon gesehen, dass der Zustand eines Teilchens zum Zeitpunkt t durch die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben wird. (Wie immer, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sich das Teilchen nur in einer Dimension, also entlang der x -Achse bewegen kann.) Um zwei Teilchen zu beschreiben, brauchen wir zwei Koordinaten, die wir x_1 und x_2 nennen wollen. Wenn sich nun das eine Teilchen in einem Zustand Ψ_a und das andere in einem Zustand Ψ_b befindet, dann kann man den

Gesamtzustand für beide Teilchen als einfaches Produkt¹⁴ der beiden Wellenfunktionen schreiben:

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \Psi_a(x_1, t)\Psi_b(x_2, t).$$

Wenn die beiden Zustände Ψ_a und Ψ_b physikalisch messbare Unterschiede besitzen, kann man in einem solchen Zustand allerdings die beiden Teilchen voneinander unterscheiden, was wir aber gerade ausschließen wollten. Also muss die Kombination „mit vertauschten Rollen“

$$\Psi_a(x_2, t)\Psi_b(x_1, t)$$

auch zulässig sein. Das im Abschnitt 2.4 besprochene Superpositionsprinzip besagt, dass auch jede Überlagerung dieser beiden Kombinationen, also

$$\alpha\Psi_a(x_1, t)\Psi_b(x_2, t) + \beta\Psi_a(x_2, t)\Psi_b(x_1, t)$$

ein zulässiger Zustand für die beiden Teilchen ist. Dabei sind α und β (komplexe) Zahlen, deren Betragsquadrate $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ die Wahrscheinlichkeiten angeben, mit denen man bei einer Messung die erste oder die zweite Kombination von Ψ_a und Ψ_b vorfindet.

Diese beiden Wahrscheinlichkeiten müssen aber gleich sein, andernfalls könnte man ja wieder die beiden Teilchen unterscheiden, indem man etwa durch wiederholte Messung feststellt, welches Teilchen mit größerer Wahrscheinlichkeit im Zustand Ψ_a ist. Es zeigt sich, dass man nur dann keine mathematische Widersprüche erhält, wenn entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha = -\beta$ ist. Es ergeben sich also zwei zulässige Formen der Wellenfunktion für zwei identische Teilchen, die wir Ψ_+ und Ψ_- nennen wollen:

$$\Psi_{\pm}(x_1, x_2, t) = \alpha\Psi_a(x_1, t)\Psi_b(x_2, t) \pm \alpha\Psi_a(x_2, t)\Psi_b(x_1, t).$$

Die Zahl α ergibt sich aus der Normierung der Wellenfunktion.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** z wird aus zwei reellen Zahlen x und y nach der Vorschrift

$$z = x + iy$$

gebildet. Dabei ist i die **imaginäre Einheit** mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

Man nennt x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z . Komplexe Zahlen kann man in einer Ebene mit x und y als Koordinaten in der üblichen Art und Weise darstellen (Gauß'sche Zahlenebene). Die Größe

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

bezeichnet man als **Betragsquadrat** von z . Der Betrag $|z|$ der Zahl z gibt dann den Abstand zwischen z und dem Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene an.

¹⁴Dass die Produkt-Form sinnvoll ist, ergibt sich aus der mathematischen Struktur der Theorie.

Zum Warmwerden berechne man einfach einmal das Produkt von $3 + 4i$ und $3 - 4i$. Tipp: Das Ergebnis ist reell und eine Quadratzahl.

Bosonen, Fermionen und das Pauli-Prinzip

Es gibt also zwei Arten von identischen Teilchen: Die mit dem Pluszeichen nennt man nach ihrem Entdecker Bose-Teilchen oder **Bosonen** und die mit dem Minuszeichen Fermi-Teilchen oder **Fermionen**¹⁵. Beide Sorten kommen in der Natur vor und unterscheiden sich durch eine weitere physikalische Eigenschaft, den *Spin*, über den wir im Kapitel 6 noch sprechen werden. Die meisten Teilchen, aus denen die Materie besteht (Elektronen, Protonen, Neutronen...) sind Fermionen; Photonen und einige andere Arten von Teilchen sind Bosonen.

Eine interessante Situation ergibt sich für Fermionen, wenn die beiden „Einteilchen-Zustände“ gleich sind, also $\Psi_a = \Psi_b$ ist. Dann ergibt sich

$$\Psi_-(x_1, x_2, t) = \alpha\Psi_a(x_1, t)\Psi_a(x_2, t) - \alpha\Psi_a(x_2, t)\Psi_a(x_1, t) = 0,$$

diese Wellenfunktion ist also **unmöglich**; zwei Fermionen können nicht im gleichen Zustand sein. Das ist das berühmte **Pauli-Prinzip**, auch Ausschließungsprinzip genannt.

Zwei Bosonen haben dagegen kein Problem damit, sich im gleichen Zustand zu befinden; das gilt auch für drei oder mehr Bosonen und hängt mit einigen interessanten physikalischen Phänomenen zusammen (Supraleitung, Supraflüssigkeit, Bosekondensation), die wir hier leider nicht besprechen können.

Das Pauli-Prinzip und das Periodensystem

Das Pauli-Prinzip ist fundamental für das Verständnis von Atomen, Molekülen und Festkörpern. Um ein Atom zu verstehen, muss zunächst die Schrödingergleichung gelöst werden. Die dabei ermittelten Eigenwerte E_i sind die möglichen Werte der Energie, die ein Elektron haben kann, wenn es sich in dem zur Energie gehörigen Zustand ϕ_i befindet. Die Elektronen, die zu einem Atom gehören, nehmen dann diese Zustände ein, indem sie sie von unten nach oben (in der Energie) auffüllen; in jedem Zustand kann ja nur ein¹⁶ Elektron sein, da die Elektronen Fermionen sind. Je nachdem, wie die Zustände und ihre Energien organisiert sind, unterscheiden sich die Atome in ihren chemischen Eigenschaften, reagieren z.B. leicht oder weniger leicht; die Details werden in der Chemie erforscht.

Schrödingergleichung Achtung: Enthält höhere Mathematik.

Die **zeitabhängige Schrödingergleichung** für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf der x -Achse bewegt, ist eine Differenzialgleichung in den Variablen x (Ort) und t (Zeit), aus der sich

¹⁵Historisch besonders korrekte Personen sprechen von Bose-Einstein-Teilchen und Fermi-Dirac-Teilchen. Die meisten Physiker:innen sind allerdings historisch nicht besonders korrekt, aber dafür sprech- und schreibfaul.

¹⁶In Wahrheit können in jedem Zustand nicht nur ein, sondern zwei Elektronen sein, die sich durch die beiden möglichen Werte des Spins unterscheiden, den wir hier erst einmal außer Acht lassen.

die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ergibt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t).$$

Am wichtigsten sind hier die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$, also die erste Ableitung nach der Zeit t und die zweite Ableitung nach dem Ort x . Immer wenn mehrere Variable im Spiel sind, bezeichnet man die Ableitungen nicht mit dem üblichen d , sondern mit ∂ , um daran zu denken, dass eben mehrere Variable im Spiel sind, von denen aber gerade nur eine betrachtet wird, während die anderen als konstant angesehen werden; man spricht von **partiellen** Ableitungen und die Schrödingergleichung ist eine **partielle Differenzialgleichung**.

Die **imaginäre Einheit** i hat die Eigenschaft $i^2 = -1$. Sie ist eine **komplexe** Zahl mit Realteil Null und Imaginärteil Eins.

\hbar (lies: „h-quer“) ist die Planck-Konstante h , dividiert durch 2π , m ist die Masse des Teilchens.

$V(x)$ ist die potentielle Energie eines *klassischen* Teilchens am Ort x , die mit den auf das Teilchen wirkenden Kräften verknüpft ist; der Term mit der zweiten Ableitung nach dem Ort hat mit der kinetischen Energie des Teilchens zu tun.

Üblicherweise führt man eine Abkürzung für alle Operationen ein, die auf der rechten Seite der Schrödingergleichung stehen, also an der Wellenfunktion vorgenommen werden. Man schreibt

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

und nennt \hat{H} den **Hamilton-Operator**.

Der Hamilton-Operator enthält über die potentielle Energie die Kräfte, die auf das Teilchen wirken und definiert damit die physikalische Situation. Er bestimmt die zeitabhängige Schrödingergleichung als **Bewegungsgleichung** für die Wellenfunktion. Darüber hinaus bestimmt er auch die möglichen Energiewerte des Teilchens über die **zeitUNabhängige Schrödingergleichung**

$$\hat{H} \phi_i(x) = E_i \phi_i(x).$$

Die Energie E_i kann nur bestimmte Werte E_0, E_1, E_2, \dots annehmen, mit verschiedenen Wellenfunktionen $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ (lies: „Phi-Null von x , ...“). Eine solche Gleichung nennt man **Eigenwertgleichung**, die Zahlen E_i heißen **Eigenwerte** und die Funktionen $\phi_i(x)$ **Eigenfunktionen**. Die Eigenfunktionen $\phi_i(x)$ des Hamiltonoperators beschreiben die **stationären Zustände** des Teilchens, bei denen sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zeitlich nicht ändert.

Die hier auftretende mathematische Situation ist übrigens überhaupt nicht ungewöhnlich. Auch die Schwingungen einer Gitarrensaite werden durch

eine partielle Differenzialgleichung beschrieben, und auch die Gitarrensaiten kann nur in ganz bestimmten Formen schwingen, die ganz bestimmten Tönen (Frequenzen) entsprechen, dem Grundton und den Obertönen. Wenn statt dessen beliebige Frequenzen möglich wären, würde die Gitarre nicht mehr wie eine Gitarre klingen, sondern sehr schräg.

Für einen Festkörper, der aus sehr vielen Atomen besteht, ergibt sich eine riesige Zahl von möglichen Zuständen für die Elektronen, mit entsprechend vielen möglichen Energien. Wieder werden die verschiedenen Zustände von den vorhandenen Elektronen von der untersten Energie an nach oben aufgefüllt, und die Eigenschaften des Festkörpers hängen davon ab, welche Möglichkeiten die Elektronen mit der höchsten Energie (der **Fermi-Energie**) haben. Wenn oberhalb dieser Energie eine Lücke im Energiespektrum klafft, muss ein Elektron sehr viel Energie aufnehmen, um in einen **angeregten Zustand** zu kommen; wir haben es dann mit einem Nichtleiter (**Isolator**) zu tun. Wenn die Energielücke beispielsweise größer ist als die Energie von Photonen des sichtbaren Lichts, dann können diese Photonen ihre Energie nicht an die Elektronen abgeben und damit ist der Festkörper durchsichtig; denken Sie an einen Salzkristall oder einen Diamanten. Wenn die Energielücke klein ist, können die Elektronen mit etwas Energie aus der Wärmebewegung angeregt werden, oder man kann durch gezielte „Verunreinigungen“ zusätzliche Elektronen einbringen und damit Anregungen erleichtern; das eröffnet das weite Feld der **Halbleitertechnologie**. Wenn gar keine Energielücke vorhanden ist, können die Elektronen sehr leicht auf äußere Kräfte reagieren und fließen. Das ist der Grund dafür, dass **Metalle** den elektrischen Strom gut leiten und nicht durchsichtig sind, sondern das Licht reflektieren und mehr oder weniger schön glänzen.

Das Pauli-Prinzip und die Unschärfe im Weltall

Auch in den „unendlichen Weiten“ des Weltraums regiert das Pauli-Prinzip. Wenn ein Stern etwa von der Größe unserer Sonne seinen Brennstoff (Wasserstoff, später Helium) in Kernfusionsreaktionen verbraucht hat, besteht er im Wesentlichen aus Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenstoff. Diese Atome sind aber durch die hohe Temperatur vollständig ionisiert, das heißt, die Elektronen haben sich von den Atomkernen gelöst, bewegen sich frei und bilden ein „Fermi-Gas“, in dem auch noch die Atomkerne schweben. Die Schwerkraft hält das kugelförmige Objekt zusammen und komprimiert seinen Durchmesser von etwa 10^6 km auf etwa 10^4 km, also etwa so klein wie die Erde; man spricht hier von einem *weißen Zwerg*. Da wegen des Pauliprinzips die vielen mehr oder weniger frei herumfliegenden Elektronen alle verschiedene Zustände einnehmen müssen, haben sie eine große Energie und üben einen großen Druck aus, der der Gravitation entgegen wirkt. Wenn die Masse des ausbrennenden Sterns noch größer ist (etwa anderthalb Sonnenmassen), kann der Druck der Elektronen der Gravitation nicht mehr standhalten. Dann werden die herumfliegenden Elektronen und die Protonen aus den Atomkernen zu Neutronen zusammengequetscht und es bleiben damit nur noch Neutronen übrig. Diese bilden dann eine ~ 10 km große Kugel, einen *Neutronenstern*. Die Neutronen sind wieder Fermionen und üben wegen des Pauli-Prinzips einen Gegendruck zur Gravitation aus. Wenn die Masse zu groß und damit die Gravitation zu stark wird, reicht auch dieser Druck nicht mehr aus und die Gravitation erzeugt ein *schwarzes Loch*.

Die quantenmechanische Unschärfe hat also spektakuläre Folgen für den Aufbau der Materie, vom Atom bis kurz vor dem Kollaps zum schwarzen Loch. Wir werden gleich

noch sehen, welche Rolle die Unschärfe bei der *Beobachtung* von schwarzen Löchern spielt.

Die Unschärfebeziehung ist eine Ungleichung,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

sie gibt also an, wie groß das Produkt der beiden Unschärfen *mindestens* ist. Wie groß es wirklich ist, hängt vom Zustand ab, in dem sich das quantenmechanische System befindet; $\Delta x \Delta p$ kann auch *viel* größer sein als $\frac{\hbar}{2}$. Für hochpräzise Messungen, bei denen häufig quantenmechanische Methoden zum Einsatz kommen, muss die Unschärfe berücksichtigt und möglichst klein gemacht werden. Solche Zustände minimaler Unschärfe¹⁷ können in modernen Lasersystemen erzeugt werden, mit denen durch Messungen von Interferenzen (Abschnitt 2.3) sehr kleine Änderungen von optischen Weglängen oder Gangunterschieden gemessen werden können.

Die Allgemeine Relativitätstheorie von Einstein sagte voraus, dass es *Gravitationswellen* geben müsste, also Änderungen der Schwerkraft, die sich periodisch in Raum und Zeit ausbreiten. Solche Gravitationswellen sollten winzige Längenänderungen hervorrufen, nach denen lange vergeblich gesucht wurde. Mit mehreren kilometerlangen Laseranordnungen wurde dann 2015 ein weniger als eine Sekunde langes Signal beobachtet, das man im Internet unter „GW150914“ findet. Durch Vergleich mit theoretischen Rechnungen konnte nachgewiesen werden, dass die Ursache die Verschmelzung von zwei schwarzen Löchern mit 29 und 36 Sonnenmassen war. Glücklicherweise fand diese kosmische Katastrophe in großer Entfernung von uns statt. Die Entdeckung wurde mit dem Physik-Nobelpreis 2017 belohnt.

Nachdem klar war, dass Gravitationswellen prinzipiell beobachtbar sind, wurden weitere Verbesserungen der Beobachtungsinstrumente durchgeführt. Eine davon beruht auf der „eigentlich einfachen“ Idee, dass die Unschärfebeziehung nur das *Produkt* von zwei Unschärfen betrifft, nicht jedoch die beiden Unschärfen einzeln. Man sollte also eine Unschärfe verkleinern können, wenn dafür die andere Unschärfe größer wird. So könnte man die Messung einer interessanten Größe genauer machen, auf Kosten der Genauigkeit einer weniger interessanten Größe. Man muss dafür die verwendeten quantenmechanischen Zustände geeignet deformieren; man spricht von „gequetschten“ Zuständen. Die Verwendung solcher Zustände wurde schon länger in kleineren Versuchsanordnungen (z.B. in Hannover) entwickelt und seit 2019 quetschen auch die größten Gravitationswellen-Interferometer die Genauigkeit, um noch besser messen zu können, was im Weltall geschieht.

¹⁷Die unscharfen Größen sind dabei nicht mehr der Ort und der Impuls eines Teilchens, sondern kompliziertere Größen, die das Wellenfeld des Lasers beschreiben.

Kapitel 3

Ist alles nur Zufall?

3.1 Wie bewegt sich ein Teilchen?

In Kapitel 2 haben wir uns allmählich daran gewöhnt, dass die Begriffe „Teilchen“ und „Welle“ in der Quantenphysik nicht mehr so eindeutig sind, wie wir das aus unserer Alltagswelt gewohnt sind. Wir haben ausführlich diskutiert, wie sich das Wellenphänomen der *Interferenz* in der Quantenphysik auswirkt. Wir haben auch gesehen, dass *Unschärfebeziehungen* schon bei klassischen Wellen auftreten, dass es also Paare von Größen gibt, die sich bei Messungen gegenseitig „behindern“: Je genauer man die eine Größe messen kann, desto ungenauer wird die andere.

Bisher ist unsere Beschreibung aber vollkommen statisch, und wir wissen noch nicht, wie sich Wellen / Teilchen in der Quantenphysik *bewegen*, und wie das mit den aus der klassischen Physik bekannten Gesetzen in Einklang zu bringen ist. Mit diesen Fragen beginnt unser Einstieg in die eigentliche *Quantenmechanik*.

Wir werden zunächst **Wellenpakete** kennenlernen; das sind Objekte, die einen akzeptablen Kompromiss zwischen den Beschreibungen als Welle und als Teilchen bieten und mit deren Hilfe klar wird, dass die Bewegungsgesetze der klassischen Physik auch in der Quantenmechanik gelten, wenn man nur die richtigen Größen betrachtet. Das ist einigermaßen beruhigend!

Weniger beruhigend ist die Tatsache, dass Teilchen ohne jede äußere Einwirkung „zerlaufen“ können. Wir werden sehen, welche sehr unterschiedlichen Zeitskalen dabei im Spiel sind. Auch sehr gewöhnungsbedürftig ist die Tatsache, dass quantenmechanische Teilchen aus „klassischen Gefängnissen“ enttrinnen können, indem sie Mauern *untertunneln*.

Wenn man die Gefängnismauern nur dick genug macht, passiert das allerdings nicht mehr; dafür tritt ein anderes Phänomen auf, das klassisch keine Erklärung hat, nämlich, dass ein zwischen solchen Mauern gefangenes Teilchen nur in ganz bestimmten Zuständen „zur Ruhe kommen“ kann. Diese **stationären Zustände** haben ganz bestimmte Energien, die die Erklärung für die optisch beobachteten Linienspektren der chemischen Elemente liefern. Teilchen mit sehr hoher Energie können, bildlich gesprochen, am Gefängnis vorbei fliegen. Aus der Art und Weise wie sie das tun, hat die Physik viel darüber gelernt, wie Teilchen mit „Mauern“ oder anderen Teilchen wechselwirken.

Spektrum (Plural: Spektren), Spektroskopie

Als **Spektrum** bezeichnet man die Gesamtheit der in einem Bereich zu beobachtenden Wellenlängen (oder Frequenzen) der elektromagnetischen Strahlung, zusammen mit ihren jeweiligen Intensitäten. Wenn in einem Bereich alle Wellenlängen auftreten können, bezeichnet man das Spektrum als **kontinuierlich**, z.B. bei der Wärmestrahlung eines heißen Objekts. Wenn nur ganz bestimmte Wellenlängen auftreten können, nennt man das Spektrum **diskret**. Das ist beispielsweise für reine chemische Elemente der Fall. Diskrete Spektren nennt man auch **Linienspektren**, benannt nach dem Bild von farbigen Linien auf dunklem Hintergrund, das sich in einem optischen Spektrometer zeigt. Durch Untersuchung solcher Linienspektren in der **Spektralanalyse** stellt man fest, welche chemischen Elemente die untersuchte Substanz enthält. Die Untersuchung von Spektren nennt man **Spektroskopie**.

Allgemeiner bezeichnet man auch die möglichen Werte der Energie eines Quantensystems als **Energiespektrum**.

Wellenpaket: Welle und Teilchen versöhnt

Im Kapitel 2 haben wir schon gesehen, dass es Wellen gibt, die auf einen kleinen Bereich im Raum beschränkt sind (Abbildung 2.7, 2.19). Wenn wir an die unvermeidliche Unschärfe bei der Ortsmessung denken, können wir diese Objekte als etwas „unscharfe“ Teilchen akzeptieren; üblicherweise bezeichnet man ein solches Gebilde als **Wellenpaket**.

Im Abschnitt 2.6 haben wir schon erwähnt, dass man Wellenpakete als Überlagerung von mehr oder weniger vielen einfachen Sinuswellen wie der in Abbildung 2.2 rechts darstellen kann. Diese einfachen Wellen unterscheiden sich durch ihre jeweilige Wellenlänge und durch die Amplitude, also den Anteil, mit dem sie zur Überlagerung beitragen. In Abbildung 2.19 haben wir Beispiele für die Konstruktion eines Wellenpakets gesehen.

Amplitude

Die **Amplitude** ist die maximale Auslenkung einer Welle, also z.B. bei einer Wasserwelle die Höhe des Wellenbergs über der ruhigen Wasseroberfläche. Außer der Amplitude ist auch die **Phase** einer Welle wichtig, die bestimmt, wo z.B. genau die Wellenberge liegen.

Bei Überlagerungen von Wellen sind sowohl die Amplituden als auch die Phasen der Teilwellen wichtig, Stichwort Interferenz.

Bei einer Überlagerung von mehreren quantenmechanischen Wellenfunktionen spricht man ebenfalls von den Amplituden der verschiedenen Wellenfunktionen und meint damit die jeweiligen (als komplexe Zahlen ausgedrückten) Anteile.

Anstelle der Wellenlänge λ haben wir dort die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ benutzt, denn k ist proportional zum Impuls, $p = \hbar k$, mit der durch 2π dividierten Planck-Konstanten \hbar . Welche Wellenzahlen mit welcher Amplitude in das Paket gepackt werden müssen, um eine bestimmte Form zu erzielen, ist Thema der Fourier-Analyse. Das ist ein Gebiet der höheren Mathematik, das nicht nur für die Physik, sondern auch für alle Ingenieurwissenschaften und die Informatik (z.B. bei der Bildverarbeitung) wichtig ist. Wir müssen uns hier mit den technischen Details aber nicht befassen.

Wie bewegt sich ein solches Wellenpaket? Das regelt die „zuständige“ Bewegungsgleichung. Für die Quantenmechanik ist das die Schrödingergleichung und für Licht oder andere elektromagnetische Wellen die Wellengleichung. Beide Gleichungen sind *linear*, das heißt, wenn man zwei Lösungen kennt, ist auch eine Kombination (Summe) aus beiden Lösungen mit beliebigen Anteilen eine Lösung der Gleichung. Diese Eigenschaft macht die Konstruktion von Wellenpaketen überhaupt erst sinnvoll und liefert sofort auch die Antwort auf die Frage von oben: Man kann einfach verfolgen, wie sich die Einzelwellen bewegen und die bewegten Wellen am Ende wieder zusammenfügen.

Bewegungsgleichungen

In der Physik sind Bewegungsgleichungen immer Differenzialgleichungen, d.h. sie geben zu einem bestimmten Zeitpunkt t an, wie sich der Zustand zeitlich ändert (mathematisch: Ableitungen nach der Zeit). Daraus kann der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt berechnet werden.

Für ein *klassisches* Teilchen ist die Bewegungsgleichung durch die Gesetze von Newton gegeben, z.B. in der Form „Kraft = Masse mal Beschleunigung“. Wenn die Kraft bekannt ist, kann aus der Beschleunigung berechnet werden, wie sich die Geschwindigkeit ändert, und daraus dann, wie sich der Ort ändert. Dann kann man die Bahn des Teilchens im Raum verfolgen, z.B. für einen Satelliten, der um die Erde kreist.

Die Bewegungsgleichung für ein *quantenmechanisches* Teilchen ist die Schrödingergleichung, eine Differenzialgleichung für die Wellenfunktion. Wegen der heisenbergschen Unschärferelation gibt es für ein quantenmechanisches Teilchen (z.B. ein Elektron in einem Atom) den Begriff der Bahn nicht.

Jede einzelne Welle bewegt sich mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit, die von der Wellenzahl abhängt. Diese Geschwindigkeit wird gemessen, indem man z.B. einen ganz bestimmten Wellenberg verfolgt. Besonders einfach ist die Situation für Licht oder andere elektromagnetische Wellen: Alle diese Wellen bewegen sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c , und damit bewegt sich auch das gesamte Licht-Wellenpaket mit dieser Geschwindigkeit. Das ist für ein quantenmechanisches Wellenpaket anders. Wenn keine äußeren Kräfte wirken, zeigt die Schrödingergleichung, dass die Geschwindigkeit einer Welle proportional zur Wellenzahl anwächst:

$$v_{\text{Welle}} = \frac{\hbar}{2m} k,$$

kürzere Wellen haben eine größere Wellenzahl k und sind damit schneller. Für ein Wellenpaket heißt das, dass die Anteile mit kürzerer Wellenlänge die anderen Wellen überholen und sich am vorderen Ende des Wellenpakets ansammeln. Das Wellenpaket,

das einem freien Teilchen entspricht, wird also seine Form verändern. Im nächsten Abschnitt wird das näher untersucht werden.

Dass unterschiedliche Wellenlängen zu unterschiedlichen Geschwindigkeiten führen, ist auch für Lichtwellen bekannt, die sich in einem Material (Glas, Wasser,...) bewegen. Dort laufen allerdings normalerweise die längeren Wellen schneller und werden deshalb beim Eintritt in das Material weniger stark gebrochen, was beispielsweise zur Entstehung von Regenbögen führt.

Die Konstruktion von Wellenpaketen bietet die Möglichkeit, im Rahmen der Quantenmechanik Objekte zu beschreiben, die sich „wie Teilchen anfühlen“, also einigermaßen im Raum lokalisiert sind. Das ist nur möglich, weil Überlagerungen von möglichen Wellenfunktionen ebenfalls mögliche Wellenfunktionen sind, also durch das Superpositionsprinzip. Die am Wellenpaket beteiligten Wellen interferieren überall destruktiv, außer in einem kleinen Raumbereich. So kann durch Überlagerung von vielen unendlich weit im Raum *ausgedehnten* Wellen ein Wellenpaket entstehen, also ein Objekt, das im Raum *lokalisiert* ist.

Es fragt sich, ob sich dieses Objekt auch so bewegt, wie wir das aus der klassischen Physik gewohnt sind. Dazu erinnern wir an den Abschnitt 2.4. Dort hatten wir gesehen, dass die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ des Wellenpakets, genauer gesagt, deren Betragsquadrat $|\Psi(x, t)|^2$, die Wahrscheinlichkeit beschreibt, mit der das Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden ist; Abbildung 2.12 zeigte ein Beispiel. Wenn diese Wahrscheinlichkeit bekannt ist, kann der Mittelwert $\langle x \rangle$ des Orts für ein Wellenpaket berechnet werden. Da ein Wellenpaket sich aus Anteilen mit verschiedenen Wellenzahlen k zusammensetzt, kann man auch den Mittelwert von k ausrechnen, und weil die Wellenzahl mit dem Impuls p durch $p = \hbar k$ verknüpft ist, erhält man so auch den Mittelwert $\langle p \rangle$ des Impulses.

Mittelwerte und Schwankungen

Mittelwerte sind das, was man umgangssprachlich meist als „Durchschnitt“ oder „Durchschnittswert“ bezeichnet, und jeder weiß intuitiv, wie man etwa die Durchschnittsnote einer Klausur bestimmt. Das mittlere Alter der 20 Personen in einem Physik-Leistungskurs könnte z.B. 16,8 Jahre betragen, genauso wie möglicherweise das mittlere Alter von 20 Menschen, die an einem Samstagvormittag nacheinander ein Kaufhaus betreten. Wenn wir das Alter der ersten Person A_1 nennen, das der zweiten Person A_2 usw., dann ist der **Mittelwert** des Alters für 20 Personen einfach

$$\langle A \rangle = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}.$$

Die spitzen Klammern $\langle \dots \rangle$ sind eine übliche Art, Mittelwerte zu bezeichnen.

Die beiden Personengruppen (Physik-LK und Kaufhaus) werden sicher unterschiedliche Altersverteilungen haben, auch wenn $\langle A \rangle$ für beide Gruppen gleich ist. Im Kaufhaus werden auch ältere Leute und Kleinkinder sein, also Personen mit großen Abweichungen vom Mittelwert. Eine Größe, die die Stärke der Abweichungen vom Mittelwert beschreibt, ist die **Varianz** (die

mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert):

$$\text{Var}(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

(Man verwendet das Quadrat der Abweichung vom Mittelwert, damit sich nicht die Abweichungen nach oben und unten gegenseitig aufheben. Die beiden angegebenen Formen der Varianz sind äquivalent. Das leuchtet nicht unmittelbar ein, lässt sich aber nachrechnen.)

Um die Abweichungen sinnvoll mit dem Mittelwert des Alters vergleichen zu können, verwendet man die Wurzel aus der Varianz; das ist die **Standardabweichung** $\sigma(A)$

$$\sigma(A) = \sqrt{\text{Var}(A)} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Die Standardabweichung $\sigma(A)$ (σ : griechischer Buchstabe sigma) ist das, was man meint, wenn man sagt, das Durchschnittsalter des Physik-LKs sei $16,8 \pm 0,8$ Jahre.

Wenn in der Physik von **Unschärfe** gesprochen wird, ist immer die Standardabweichung gemeint. Oft bezeichnet man die Unschärfe mit dem großen griechischen Delta; Δx bedeutet dann die Standardabweichung des Orts x : $\Delta x = \sigma(x)$, und ähnlich für den Impuls p und andere Größen.

Wenn man die Schrödingergleichung für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ eines Teilchens löst, also die zeitliche Entwicklung von $\Psi(x, t)$ verfolgt, dann zeigt sich, dass die *Mittelwerte* der fundamentalen physikalischen Größen sich so verhalten, wie es die klassischen Bewegungsgleichungen beschreiben. Der Impuls p ist das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit, wobei die Geschwindigkeit die zeitliche Änderung des (mittleren) Orts ist; es gilt also auch in der Quantenmechanik

$$m \cdot \text{zeitliche Änderung von } \langle x \rangle = \langle p \rangle.$$

Auch Newtons altherwürdiges Gesetz „zeitliche Änderung des Impulses = wirkende Kraft“ gilt in der Quantenmechanik, in der Form

$$\text{zeitliche Änderung von } \langle p \rangle = \langle F(x) \rangle,$$

wobei $F(x)$ die am Ort x wirkende Kraft¹ ist. Diese beiden Gleichungen zeigen, dass die Quantenmechanik nicht ganz so verrückt ist, wie man manchmal glaubt, sondern beruhigende Ähnlichkeiten mit der klassischen Mechanik besitzt. Diese Bewegungsgesetze für Mittelwerte gelten für *beliebige* Wellenfunktionen, aber der enge Zusammenhang zum gewohnten Verhalten von Teilchen gilt nur dann, wenn die auftretenden Mittelwerte keinen allzu großen Schwankungen unterliegen. Genügend schmale Wellenpakete verhalten sich also wie klassische Teilchen. Wenn dagegen die Unschärfen, also die Standardabweichungen von Ort oder Impuls zu groß werden, macht es nicht mehr viel Sinn, über die Mittelwerte zu reden.

Besonders aufmerksame Leser:innen haben möglicherweise beim Begriff der Geschwindigkeit ein Problem bemerkt, das hier gleich besprochen werden soll. Etwas weiter

¹In der Schrödingergleichung taucht nicht die Kraft auf, sondern die potentielle Energie. Die Kraft ist damit durch die negativ genommene räumliche Änderung (Ableitung) verknüpft.

oben hatten wir die Geschwindigkeit einer einzelnen Welle aus dem Wellenpaket angegeben; ganz präzise war es die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenmaximum (oder ein Nulldurchgang, jedenfalls ein Punkt mit einer bestimmten festen Phase der Welle) bewegt. Wenn wir in der Formel für diese Geschwindigkeit v_{Welle} das Produkt $\hbar k$ mit dem Impuls p gleichsetzen, ergibt sich

$$v_{\text{Welle}} = \frac{p}{2m}.$$

Wenn wir andererseits an ein ganzes Wellenpaket denken und dessen Geschwindigkeit durch die zeitliche Änderung von $\langle x \rangle$ definieren, dann haben wir

$$v_{\text{Paket}} = \frac{\langle p \rangle}{m},$$

so wie wir es klassisch gewohnt sind. Offenbar gibt es hier also zwei verschiedene Geschwindigkeiten! Beide hängen noch dazu von der Wellenzahl k ab: Bei v_{Welle} ist das die mit dem scharf definierten Impuls p verknüpfte Wellenzahl, bei v_{Paket} ist es die durch den *mittleren* Impuls $\langle p \rangle$ definierte mittlere Wellenzahl. Was wir v_{Welle} genannt hatten, heißt allgemein in der Physik **Phasengeschwindigkeit**, und v_{Paket} heißt **Gruppengeschwindigkeit**. Dass diese beiden Geschwindigkeiten nicht gleich sind, kommt in der Physik häufig vor, beispielsweise für Wasserwellen. Elektromagnetische Wellen im leeren Raum sind fast die einzigen Wellen, die sich für beliebige Wellenlängen mit einer einheitlichen Geschwindigkeit ausbreiten, nämlich mit der Lichtgeschwindigkeit c .

Die Tatsache, dass für ein quantenmechanisches Wellenpaket die Phasengeschwindigkeit drastisch kleiner ist als die Gruppengeschwindigkeit, kann man beobachten, wenn man die Schrödingergleichung für ein kräftefreies Wellenpaket wie z.B. in Abbildung 2.7 löst und daraus einen Film macht. Während das ganze Paket läuft, entstehen während der Bewegung am vorderen Ende ständig neue Wellen, die dann „nach hinten durchgereicht“ werden und am hinteren Ende wieder verschwinden.

Eine gut gemachte Simulation für ein kräftefreies Wellenpaket findet sich unter <https://demonstrations.wolfram.com/WavepacketForAFreeParticle/>. Dort wird wahlweise der Realteil oder der Imaginärteil von $\Psi(x, t)$, oder auch $|\Psi(x, t)|^2$ gezeigt; diese Größe (Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte) heißt dort $P(t)$. Durch Klicken auf eines der grauen Felder mit dem Pluszeichen kann man die Zeit und andere Größen ändern. Wenn man „momentum² uncertainty, Δp “ größer macht als die Voreinstellung, sieht man sehr gut, dass die kurzen Wellen schneller sind als die langen, aber dass das Gesamtpaket noch schneller läuft. In der Onlineversion kann man die Zeit nur in Sprüngen „weiterklicken“; wer eine kontinuierliche Simulation will, muss die Demonstration und die zugehörige freie Anzeigesoftware WolframPlayer herunterladen und installieren.



Wellenfunktion Achtung: Enthält höhere Mathematik.

Die **Wellenfunktion** eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf der x -Achse bewegt, hängt ab vom Ort x und der Zeit t ; meist wird sie bezeich-

²momentum=Impuls

net mit $\Psi(x, t)$ (lies: „Psi von x und t “).

$\Psi(x, t)$ ist eine *komplexe* Funktion, d.h. sie besteht aus zwei Teilen, $\text{Re}\Psi(x, t)$ und $\text{Im}\Psi(x, t)$ (lies: „Realteil von Psi und Imaginärteil von Psi“). Diese beiden Teile spielen eine ähnliche Rolle wie die Koordinaten x und y eines Punktes in einer Ebene, wo beispielsweise der Abstand r des Punktes (x, y) vom Nullpunkt mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden kann:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Aus der Wellenfunktion ergibt sich auf ähnliche Weise die wichtige Größe

$$|\Psi(x, t)|^2 = (\text{Re}\Psi(x, t))^2 + (\text{Im}\Psi(x, t))^2$$

(lies: „Psi-Betragsquadrat“), die angibt, wie wahrscheinlich es ist, das Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden. (Präzise ausgedrückt, ist $|\Psi(x, t)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.)

Freie Teilchen zerlaufen

Wir wissen inzwischen, dass Wellenpakete, die ein kräftefreies Teilchen beschreiben, aus Anteilen mit verschiedenen Wellenzahlen k bzw. Impulsen $p = \hbar k$ zusammengesetzt sind, und dass diese Anteile sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen. Deshalb verändert sich die Form eines solchen Wellenpakets im Lauf der Zeit. Wir wollen nun sehen, was das im Einzelnen bedeutet.

Dazu betrachten wir ein so genanntes Gauß'sches Wellenpaket, das ein kräftefreies Teilchen mit der Masse m beschreiben soll. Das ist ein Wellenpaket, für das $|\Psi(x, t)|^2$ zur Anfangszeit $t = 0$ die Form einer Gauß'schen Glockenkurve besitzt, sehr ähnlich den Kurven in Abbildung 2.19. Das Wellenpaket soll sich mit einem bestimmten mittleren Impuls $\langle p \rangle$ bewegen und zur Zeit $t = 0$ soll der Ort $\langle x \rangle = 0$ sein. Das ist ein Beispiel, für das man den zeitlichen Verlauf der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ mithilfe der Schrödingergleichung vollständig durchrechnen kann³.

Das Wellenpaket kann so eingerichtet werden, dass zur Zeit $t = 0$ die Ortsunschärfe $\Delta x = \frac{a}{2}$ beträgt, und die Impulsunschärfe $\Delta p = \frac{\hbar}{a}$. Die Konstante a ist eine Längenangabe, die die anfängliche Ortsunschärfe festlegt. Sie kann beliebig gewählt werden; Beispiele werden wir gleich sehen. Das Unschärfeprodukt ist dann

$$\Delta x \Delta p = \frac{a}{2} \frac{\hbar}{a} = \frac{\hbar}{2},$$

hat also den kleinsten Wert, den die Unschärfebeziehung erlaubt. Welche Entwicklung erwarten wir nun im Laufe der Zeit?

Da das Wellenpaket sich aus Wellen mit bestimmten Wellenzahlen (Impulsen) zusammensetzt, und da deren Verteilung sich beim Weiterlaufen der Wellen nicht ändert, erwarten wir *keine* Änderung der Impulsunschärfe. Weil die Wellen mit kurzer Wellenlänge schneller laufen als die mit langer Wellenlänge, erwarten wir aber, dass das Wellenpaket im Lauf der Zeit im Ort *breiter* wird. Das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$ wird

³Viele Physikstudent:innen haben mit dieser Übungsaufgabe einige lehrreiche Stunden verbracht.

also größer werden. Genau das liefert auch die Lösung der Schrödingergleichung: $\Delta p = \frac{\hbar}{a}$ bleibt konstant und Δx wird zeitabhängig:

$$\Delta x = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\hbar t}{ma^2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{T}\right)^2}.$$

Dabei ist

$$T = \frac{ma^2}{2\hbar}$$

eine Abkürzung für die Zeitskala, auf der sich Δx ändert. Eine kleine Tabelle zeigt, was das konkret bedeutet:

t	Δx
0	1,00 $a/2$
T	1,41 $a/2$
$2T$	2,24 $a/2$
$3T$	3,16 $a/2$
$4T$	4,12 $a/2$
...	...
$9T$	9,06 $a/2$
$10T$	10,05 $a/2$

Nach der Zeit $10T$ hat sich Δx also etwa verzehnfacht. Die Zeit T , die angibt, wie schnell Δx zunimmt, ist um so länger, je größer die Masse m des Teilchens ist. Klassische (große und schwere) Objekte werden also länger „scharf bleiben“ als etwa Elektronen. Da im Nenner der Formel für T die winzige Größe \hbar steht, könnte T durchaus groß sein. Wir berechnen nun die Zeit T für drei Objekte aus verschiedenen Größen- bzw. Gewichtsklassen.

Wir fangen klein an, mit einem Elektron ($m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$), mit einer Anfangs-Unschärfe, die etwa der Größe eines Atoms entspricht ($a = 10^{-10} \text{m}$). Dann ergibt sich⁴ für die „Zerlauf-Zeit“

$$T = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot (10^{-10} \text{m})^2}{2 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}} = 4,3 \cdot 10^{-17} \text{s},$$

das Elektron delokalisiert sich also sehr schnell. Die Schwingungsdauer von sichtbarem Licht, eine nach allen menschlichen Maßstäben sehr kurze Zeit, etwa 10^{-15}s , ist im Vergleich dazu immer noch sehr viel länger.

Das nächste Objekt ist immer noch sehr klein, aber ohne Zweifel schon klassisch: Ein Staubkorn, mit einem Durchmesser von 10^{-6}m , also einem Tausendstelmillimeter oder einem Mikrometer (das ist die allerfeinste Klasse von Feinstaub). Das Volumen eines solchen Teilchens ist von der Größenordnung 10^{-18}m^3 und die Masse damit $m = 10^{-15} \text{kg}$, wenn wir die Dichte des Staubmaterials etwa gleich der von Wasser annehmen. Wir nehmen dann noch an, wir könnten das Staubkorn auf einer Skala lokalisieren, die der Auflösung eines optischen Mikroskops entspricht, also etwa der Wellenlänge von Licht, sagen wir, $500 \cdot 10^{-9} \text{m}$. Wir erhalten dann

$$T = \frac{10^{-15} \text{kg} \cdot (500 \cdot 10^{-9} \text{m})^2}{2 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}} = 1,18 \cdot 10^6 \text{s},$$

⁴Beachte: $1 \text{J} = 1 \text{Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$.

das sind 13,7 Tage. Wenn wir das Staubkorn unter dem Mikroskop gesehen haben, können wir also ein paar Tage Urlaub machen, und danach ist das Staubkorn immer noch da.

Ein Objekt, das immer noch nicht besonders groß ist, das man aber schon mit der Hand anfassen kann, ist ein Metallkugelchen von etwa 2mm Durchmesser, mit einer Masse von 50mg. Das denken wir uns lokalisiert auf die Messgenauigkeit guter mechanischer Messgeräte (Mikrometerschraube), also etwa ein Tausendstelmillimeter, und berechnen

$$T = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{kg} \cdot (10^{-6} \text{m})^2}{2 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}} = 2,37 \cdot 10^{17} \text{s},$$

das sind $7,5 \cdot 10^9$ Jahre. Das Alter des Universums wird gegenwärtig auf etwa $13,8 \cdot 10^9$ Jahre geschätzt.

Freie Teilchen von halbwegs makroskopischer Größe werden sich also verhalten wie gewohnt und zu jeder Zeit an einem bestimmten Ort sein, ohne zu einer Art Wolke zu zerfließen. Dann ist klar, dass wir die gewohnten Gesetze der klassischen Mechanik verwenden können, um die Bewegungen solcher Teilchen zu beschreiben; wir hatten ja weiter oben schon gesehen, dass die Mittelwerte von Ort und Impuls den klassischen Bewegungsgleichungen gehorchen. Wie es aber „echt quantenmechanischen“ Teilchen ergeht, die sich unter dem Einfluss äußerer Kräfte befinden, untersuchen wir in den folgenden Abschnitten, mit teils überraschenden Ergebnissen.

Hindernisse und Tunnel

Wie schon gewohnt, machen wir uns das Leben einfach und untersuchen nur die Bewegung eines Teilchens in einer Dimension x . Im Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, dass man für ein klassisches Teilchen dazu nur die kinetische und potentielle Energie betrachten muss. Wenn am Ort x eine Kraft wirkt, hängt die potentielle Energie von x ab; um das zu kennzeichnen, schreiben wir sie als $V(x)$. Die Kraft wirkt immer in die Richtung, in der $V(x)$ abnimmt und ist um so stärker, je schneller diese Abnahme ist. Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie bleibt für die gesamte Bewegung konstant.

Kinetische und potentielle Energie, quantenmechanisch

Auch in der Quantenphysik kann man kinetische und potentielle Energie definieren, und genau wie in der klassischen Physik ist die Gesamtenergie als Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant; der Satz von der Erhaltung der Energie gilt auch in der Quantenphysik.

Die potentielle Energie ist wie im klassischen Fall durch eine von einer Ortskoordinate abhängige Funktion $V(x)$ festgelegt. (Wir betrachten der Einfachheit halber nur eine Bewegung in einer Dimension.) Der Wert der potentiellen Energie eines quantenmechanischen Teilchens in einem bestimmten Zustand hängt aber auch von der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ ab, die diesen Zustand beschreibt. Man bildet dazu den Mittelwert (über die Koordinate x) der klassischen potentiellen Energiefunktion $V(x)$, und als Gewichtung beim Mitteln wird die durch $|\Psi(x, t)|^2$ gegebene Aufenthaltswahrscheinlichkeit benutzt.

Die kinetische Energie eines Teilchens im Zustand $\Psi(x, t)$ hängt davon ab, wie stark sich $\Psi(x, t)$ räumlich ändert (also von der Ableitung von $\Psi(x, t)$ nach x). Diese Größe hängt natürlich von x ab und muss auch wieder über den ganzen Raumbereich gemittelt werden, in dem sich das Teilchen aufhält.

Speziell für ein *freies* Teilchen mit Impuls p und Masse m ist die Wellenfunktion eine Welle mit einer bestimmten (De Broglie-) Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$. (h ist die Planck-Konstante.) Je kürzer die Wellenlänge ist, desto größer ist der Impuls p und damit die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$. Je kürzer die Wellenlänge ist, desto stärker ist auch die räumliche Änderung der Wellenfunktion und man sieht den Zusammenhang zur allgemeineren Definition der kinetischen Energie.

Um die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ zu bestimmen, muss man die Schrödinger-Gleichung lösen. Um aber ohne viel Rechnen ein grobes anschauliches Bild zu bekommen, kann man sich stattdessen auch überlegen, wie die Wellenfunktion aussehen muss, damit die kinetische und die potentielle Energie sich überall im Raum zum korrekten Wert der Gesamtenergie addieren.

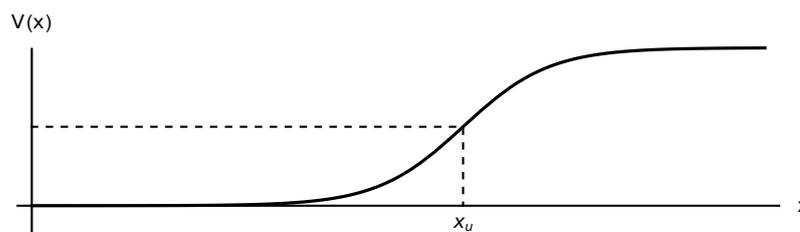


Abbildung 3.1: Ein klassisches Teilchen mit gegebener Energie (waagrechte gestrichelte Linie) kommt bis zum klassischen Umkehrpunkt x_u . Der Bereich $x > x_u$ ist klassisch verboten. (Grafik: Stolze)

Die Abbildung 3.1 zeigt eine einfache Situation für eine eindimensionale Bewegung. Die Bewegung wird bestimmt durch den Verlauf der potentiellen Energie, die auf der linken Seite des Bildes konstant den Wert Null hat und auf der rechten Seite konstant einen bestimmten größeren Wert. Im Übergangsbereich steigt sie von Null auf diesen größeren Wert an. Ein klassisches Teilchen, das von links mit einer bestimmten (Gesamt-) Energie (waagrechte gestrichelte Linie) angefliegen kommt, wird in dem Bereich abgebremst, in dem die potentielle Energie $V(x)$ zunimmt, bis seine kinetische Energie und damit seine Geschwindigkeit Null ist. Das geschieht an der Stelle x_u und dort kehrt das Teilchen seine Bewegung um und fliegt zurück; deshalb nennt man x_u den klassischen Umkehrpunkt. Den Bereich rechts von x_u kann das Teilchen nicht erreichen: Das ist der klassisch verbotene Bereich. Wie groß dieser Bereich ist, hängt natürlich davon ab, wieviel Energie das Teilchen am Anfang besitzt.

Um die entsprechende quantenmechanische Situation zu untersuchen, vereinfachen wir stark und machen den Verlauf der potentiellen Energie viel steiler, so wie in der Abbildung 3.2. Ein klassisches Teilchen würde wieder nur bis $x = x_u$ kommen. Um zu erfahren, was ein quantenmechanisches Teilchen tut, müssten wir die Schrödinger-Gleichung lösen. Wir ersetzen diese mathematische Prozedur durch eine einfache Energiebetrachtung. Ein Teilchen, das sich im Bereich links von x_u aufhält und eine bestimmte kinetische Energie (= Gesamtenergie, da die potentielle Energie $V(x)$ dort

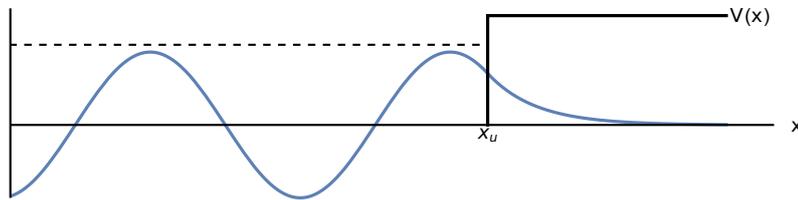


Abbildung 3.2: Ein quantenmechanisches Teilchen mit gegebener Gesamtenergie (waagrechte gestrichelte Linie) wird links vom klassischen Umkehrpunkt x_u durch eine Welle dargestellt. Im Bereich $x > x_u$ fällt die Wellenfunktion exponentiell ab. (Grafik: Stolze)

Null ist) hat, besitzt auch einen bestimmten Impuls und damit auch eine bestimmte (de Broglie-) Wellenlänge. Wenn es aber einen genau bestimmten Impuls hat, muss nach der Unschärfebeziehung sein Ort völlig unbestimmt sein. Wir erwarten also eine Welle mit einer bestimmten Wellenlänge, die sich über den gesamten Bereich links von x_u erstreckt. Das ist auch das, was die Schrödingergleichung liefert, wenn man es genau durchrechnet.

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = e^x,$$

wobei $e = 2,71828\dots$ die Eulersche Zahl ist. Man sieht, dass diese Funktion sehr stark anwächst, wenn x größer wird: $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^2 = e \cdot e = 7,389$, ... $e^{10} = 22026,5$, $e^{20} = 485.165.195$. Jedesmal, wenn x um 1 wächst, wird e^x „ver-e-facht“. Das nennt man exponentiellen *Anstieg*.

Einen exponentiellen *Abfall* zeigt die Funktion $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, die jedesmal, wenn x um 1 wächst, um einen Faktor $\frac{1}{e} = 0,3679$ kleiner wird: $e^{-10} = 0,000045$.

Ein Beispiel für exponentiellen Abfall (in der Zeit t) liefert der radioaktive Zerfall. Die Anzahl $N(t)$ der zur Zeit t vorhandenen radioaktiven Teilchen ist

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau},$$

wobei N_0 die Anzahl zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist. τ (griechischer Buchstabe tau) ist die mittlere „Lebensdauer“ eines radioaktiven Teilchens bis zum Zerfall. $t_{1/2} = 0.6931\tau$ ist die Halbwertszeit, nach der noch die Hälfte der am Anfang vorhandenen Teilchen da ist. Nach zehn Halbwertszeiten ist nur noch $1/1024$ der radioaktiven Teilchen da.

Da die Schrödingergleichung eine Differenzialgleichung für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ ist, muss diese bestimmte mathematische Bedingungen⁵ erfüllen. Darum kann $\Psi(x, t)$ am klassischen Umkehrpunkt x_u nicht plötzlich Null werden. Im Bereich rechts von x_u ist die Gesamtenergie (gestrichelte Linie) kleiner als die potentielle Energie $V(x)$. Es

⁵Genau gesagt: Die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung nach x müssen stetig sein, sonst ist die in der Schrödingergleichung auftretende zweite Ableitung nach x nicht definiert.

stellt sich heraus, dass die Schrödingergleichung auch für eine solche „klassisch verbotene“ Situation Lösungen für die Wellenfunktion liefert. Diese Lösungen sind ansteigende oder abfallende Exponentialfunktionen. Eine ansteigende Exponentialfunktion würde rechts von x_u über alle Grenzen wachsen und könnte nicht sinnvoll mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit verknüpft werden, wie im Abschnitt 2.4 erläutert. Es bleibt also nur eine nach rechts hin abfallende Exponentialfunktion übrig, die an der Stelle x_u „glatt“ an die Welle links von x_u angeschlossen werden muss.

Im Gegensatz zu einem klassischen Teilchen kann also ein quantenmechanisches Teilchen ein Stück weit in den klassisch verbotenen Bereich $x > x_u$ eindringen. Wie weit, das hängt davon ab, wieviel Energie dem Teilchen „fehlt“; je größer das Defizit an Energie, desto schneller fällt die Wellenfunktion in den klassisch verbotenen Bereich hinein ab.

Wenn aber die Energie des Teilchens *größer* ist als die Höhe der „Schwelle“ in der potentiellen Energie, dann ist der Bereich $x > x_u$ nicht mehr verboten und das von links kommende Teilchen kann seine Reise fortsetzen, aber natürlich mit einer geringeren kinetischen Energie und damit einem geringeren Impuls und größerer Wellenlänge.

Das sieht dann auf den ersten Blick wieder aus wie in der klassischen Physik: Bei x_u wird die kinetische Energie des Teilchens kleiner, aber es fliegt auf jeden Fall weiter. In der Quantenmechanik müssen allerdings die vorhin schon erwähnten mathematischen „Anschlussbedingungen“ für die Schrödingergleichung bei x_u erfüllt werden und es stellt sich heraus, dass das nur möglich ist, wenn das Teilchen auch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wieder nach links zurückfliegt, also, wie man sagt, **reflektiert** wird.

Ein klassisches Teilchen wird also an einer Potentialschwelle wie in der Abbildung 3.2 mit Sicherheit reflektiert, wenn die Energie zu klein ist und mit Sicherheit durchgelassen (**transmittiert**), wenn die Energie ausreicht. Ein quantenmechanisches Teilchen kann ein Stück weit in den klassisch verbotenen Bereich eindringen, auch wenn die Energie zu klein ist; wenn sie groß genug ist, kann das Teilchen transmittiert, aber mit einer bestimmten (berechenbaren) Wahrscheinlichkeit auch reflektiert werden.

Eine besonders interessante Situation ergibt sich, wenn die Stufe in der potentiellen Energie $V(x)$ in Abbildung 3.2 nicht unbegrenzt breit ist, sondern bei x_o , ein Stück rechts von x_u , wieder auf Null abfällt, wie in Abbildung 3.3. Die Form der potentiellen Energie erinnert dann an eine Mauer. Ein klassisches Teilchen, das sich links von der Mauer (also bei $x < x_u$) aufhält und dessen Gesamtenergie der gestrichelten Linie entspricht, kommt niemals auf die rechte Seite ($x > x_o$) der Mauer. Für ein quantenmechanisches Teilchen erhält man links eine Welle als Wellenfunktion, deren Wellenlänge mit der Gesamtenergie zusammenhängt, genau wie im Fall der Abbildung 3.2. Genau wie dort kann wieder die Wellenfunktion bei x_u nicht plötzlich auf Null abfallen, sondern die exponentielle Lösung im klassisch verbotenen Bereich „in der Mauer“ muss an die Wellen-Lösung der Schrödingergleichung „glatt“ angeschlossen werden. Im Bereich rechts von x_o darf sich ein quantenmechanisches Teilchen mit der zu Anfang vorgegebenen Energie (gestrichelte Linie) aufhalten, das heißt, die Schrödingergleichung hat dort eine Lösung. Diese Lösung ist wieder eine Welle, denn die Gesamtenergie ist gleich der kinetischen Energie (die potentielle Energie ist Null) und die Wellenlängen rechts und links von der „Mauer“ sind gleich, da die kinetische Energie gleich bleibt, und damit auch der Impuls. (Der „heilige“ Satz von der Erhaltung der Energie!) Die Amplitude der Welle ist allerdings rechts deutlich kleiner als links, da ja „unter der Mauer“ die Wellenfunktion exponentiell abgenommen hat und da die Wellenfunktionen bei x_o wieder glatt aneinander angeschlossen werden müssen.

Je kleiner die Amplitude rechts von der Mauer ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen die Mauer nicht durchdringt, sondern abprallt und wieder nach links zurückfliegt.

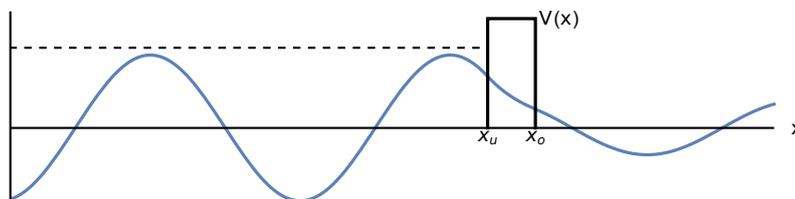


Abbildung 3.3: Ein quantenmechanisches Teilchen kann eine „Mauer“ in der potentiellen Energie nicht überspringen, wenn es nicht genug Energie besitzt, aber es kann die Mauer „untertunneln“. (Grafik: Stolze)

Ein Teilchen kann also eine Mauer oder einen Berg in der potentiellen Energie durchdringen, selbst wenn seine Energie nicht ausreicht, um das Hindernis klassisch zu übersteigen. Stattdessen, so das anschauliche Bild, bohrt sich das Teilchen einen Tunnel in der Höhe, die seiner Energie entspricht. Das Phänomen bezeichnet man als **Tunneleffekt**. Die Tunnelwahrscheinlichkeit, mit der es das Teilchen durch die Wand schafft, wird exponentiell kleiner, wenn die Wand höher wird (weil dann die Wellenfunktion in der Wand stärker abfällt) und wenn sie dicker wird (weil die Wellenfunktion dann ein längeres Stück weit abfällt).

Wir haben uns den Tunneleffekt an einem besonders einfachen Fall klar gemacht. Die potentielle Energie $V(x)$ war jeweils in einem ganzen Bereich konstant, und dann hat die Schrödingergleichung für die Wellenfunktion besonders einfache Lösungen. Wenn die Gesamtenergie größer ist als die potentielle Energie, ist die Lösung eine Welle, wenn sie kleiner ist, ist die Lösung eine exponentiell ansteigende oder abfallende Funktion. An den Stellen, wo die potentielle Energie sich ändert, muss man diese einfachen Lösungen aneinander anpassen. Natürlich gibt es den Tunneleffekt auch für kompliziertere Verläufe der potentiellen Energie, nur ist die Rechnung dann nicht so einfach wie in dem Fall aus Abbildung 3.3.

Der Tunneleffekt lieferte schon kurze Zeit nach seiner Entdeckung in der Theorie die Lösung eines Problems, das die Physik lange beschäftigt hatte. Es geht um den so genannten α -Zerfall. Dabei zerfällt ein Atomkern, indem er ein α -Teilchen (zusammengesetzt aus zwei Protonen und zwei Neutronen) aussendet. Für ein bestimmtes Isotop (einen Kern mit einer bestimmten Anzahl von Protonen und Neutronen) hat das α -Teilchen eine bestimmte Energie, und der Zerfall erfolgt mit einer bestimmten Halbwertszeit. Die Energien betragen grob zwischen 2 und 8 MeV (Mega-Elektronenvolt, also Millionen Elektronenvolt), aber die Halbwertszeiten unterscheiden sich extrem stark, zwischen 10^{-12} s und Milliarden Jahren.

Die entscheidende Idee zur Erklärung des α -Zerfalls war nun die folgende: Die α -Teilchen existieren schon innerhalb des Atomkerns, bewegen sich dort frei und besitzen bereits die (kinetische) Energie, die man nach dem Zerfall messen kann. Das führt dazu, dass sie innerhalb des Kerns hin und her fliegen, aber von den sehr starken Kernkräften immer wieder gestoppt werden und zurückprallen. Die potentielle Energie $V(x)$ der Kernkräfte ist innerhalb des Kerns praktisch konstant, es wirkt also keine Kraft, aber am Rand des Kerns steigt sie sehr steil an und hält das α -Teilchen auf diese Weise

fest. Das α -Teilchen läuft also immer wieder gegen eine hohe Mauer aus potentieller Energie an, die es mit einer gewissen, sehr kleinen Wahrscheinlichkeit durchdringen kann; dann hat ein α -Zerfall stattgefunden. Die Zerfallswahrscheinlichkeit hängt sehr stark (nämlich exponentiell) von der kinetischen Energie des α -Teilchens und von den Abmessungen der Potential-Mauer ab; so kommen die sehr unterschiedlichen Halbwertszeiten zustande.

Wenn der Tunneleffekt es einem Teilchen ermöglicht, einen Atomkern zu verlassen, dann sollte es auch möglich sein, in einen Atomkern einzudringen. Genau das ist der Prozess, durch den in der *Sonne* Energie freigesetzt wird: Kernfusion. Der erste Schritt dabei ist die Fusion von zwei Wasserstoff-Kernen (Protonen). Die elektrische Abstoßung zwischen den positiv geladenen Protonen erzeugt eine hohe Barriere in der potentiellen Energie. Wegen der hohen Temperatur im Inneren der Sonne bewegen sich die Protonen zwar sehr schnell; trotzdem reicht diese thermische kinetische Energie nicht annähernd aus, um die Barriere zu überwinden. Nur der Tunneleffekt macht den Prozess möglich und sorgt so dafür, dass die Sonne scheinen kann. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Tunnelprozess (und die weiteren Schritte der Kernreaktionen in der Sonne) ist allerdings so gering, dass jedes Proton im Mittel etwa eine Milliarde Jahre „lebt“, bevor es eine Fusion mitmacht. Zum Glück! Wäre die Wahrscheinlichkeit größer, würde die Sonne sehr viel mehr Energie abstrahlen und die Erde wäre viel zu heiß. Außerdem würde die Sonne sehr viel schneller ausbrennen und es gäbe nicht genug Zeit, um durch die Evolution auf der Erde oder einem anderen Planeten höhere Lebensformen zu entwickeln. Ohne den Tunneleffekt wären wir alle nicht da.

Auf den Tunneleffekt verlassen sich heute auch sehr viele Menschen jeden Tag, ohne davon zu wissen: Die Tatsache, dass Information in einen elektronischen *Flash-Speicher* (wie er in jedem USB Memory-Stick steckt) geschrieben werden kann und danach lange haltbar ist, verdankt sich auch dem Tunneleffekt. Das ist nur eines von vielen Beispielen für die Anwendung des Tunneleffekts in der Elektronik, auf die wir hier aber nicht näher eingehen.

Ein weniger alltägliches Gerät, das auch den Tunneleffekt nutzt, ist das *Rastertunnelmikroskop* (Scanning Tunneling Microscope, STM), mit dem man einzelne Atome „sehen“ oder eigentlich ertasten kann. Eine sehr dünne Nadelspitze befindet sich sehr dicht über einer Oberfläche, die untersucht werden soll. Zwischen der Spitze und der Oberfläche liegt eine elektrische Spannung an, aber es fließt „eigentlich“ kein Strom, da ja kein elektrischer Kontakt zwischen der Spitze und der Oberfläche besteht. Nur der Tunneleffekt führt dazu, dass doch ein sehr kleiner Strom fließt, der sehr stark (exponentiell) vom Abstand zwischen der Spitze und der Oberfläche und von der Art der Atome an der Oberfläche abhängt. Durch Abfahren der Oberfläche (Rastern) kann man sehr feine Details der Oberfläche untersuchen und sogar einzelne Atome identifizieren oder auf der Oberfläche hin und her bewegen und so Nanometer kleine Strukturen herstellen. Die Untersuchung von Oberflächen und von kleinen Teilchen auf Oberflächen ist auch ein Forschungsgebiet an der TU Dortmund; das Bild 3.4 wurde in der Arbeitsgruppe von Prof. Hövel aufgenommen.

Gefangene Teilchen und stationäre Zustände

Bisher haben wir Teilchen betrachtet, die sich mehr oder weniger frei bewegen konnten, bis auf Hindernisse, die entweder überwunden oder untertunnelt werden konnten, je nach Energie des Teilchens. Nun soll es um Teilchen gehen, die gebunden sind, also

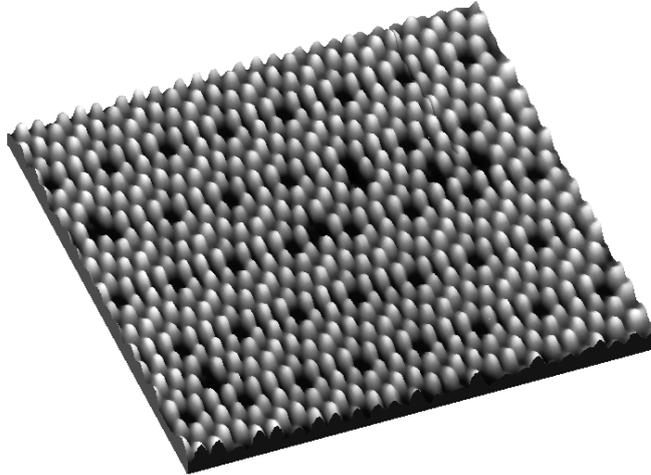


Abbildung 3.4: Rastertunnelmikroskopisches Bild der Oberfläche eines Silizium-Kristalls, aufgenommen bei 100 Kelvin oder -173°C . Die Bildgröße beträgt $21\text{ nm} \times 13\text{ nm}$. Die Silizium-Atome an der Oberfläche sind anders angeordnet als im Inneren des Kristalls, da sie weniger Nachbarn für eine chemische Bindung haben. In dieser speziellen regelmäßigen Anordnung erkennt man unregelmäßig angeordnete einzelne „fehlende“ Atome. Diese Defekte in der Struktur zeigen, dass das Mikroskop tatsächlich jedes individuelle Atom abbildet. (Bild: Prof. Dr. Heinz Hövel)

etwa Elektronen in einem Atom; die Spektren von Atomen waren ja schließlich auch ein Anlass zur Entwicklung der Quantenmechanik.

Wir vereinfachen wieder so weit wie möglich und betrachten ein Teilchen in einer Dimension. Die potentielle Energie $V(x)$ stellen wir uns auch wieder sehr einfach vor; sie soll überall Null sein, außer zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = a$, wo sie den negativen Wert $-U$ haben soll. (Abbildung 3.5) Die potentielle Energie bildet nun also eine rechteckige Grube, so wie sie bei unserem einfachen Modell für den Tunneleffekt eine Mauer gebildet hatte.

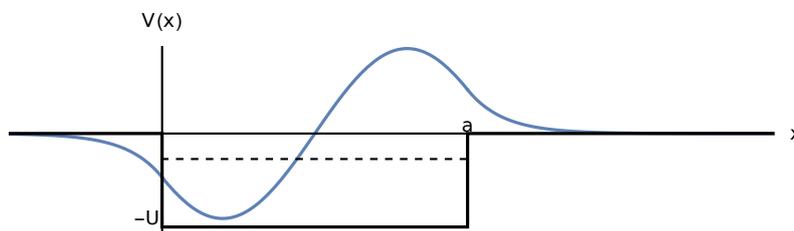


Abbildung 3.5: Ein einfacher Verlauf der potentiellen Energie, der gebundene Zustände möglich macht. Die Energie eines der gebundenen Zustände ist als gestrichelte Linie eingezeichnet, die Wellenfunktion des Zustands als durchgezogene blaue Linie. (Grafik: Stolze)

Wir wissen schon, wie die Lösungen der Schrödingergleichung für konstante potentielle Energie aussehen: Wellen, wenn die Gesamtenergie größer ist als die potentielle

Energie und Exponentialfunktionen, wenn sie kleiner ist. Wenn nun ein Teilchen eine Energie $E > 0$ hat, dann ist seine Wellenfunktion überall in Abbildung 3.5 eine Welle und damit kann sich das Teilchen im gesamten Raum aufhalten und ist nicht gebunden. Ein gebundenes Teilchen muss also eine negative Energie haben. Die dazu gehörige Wellenfunktion „in der Grube“ hat eine bestimmte Wellenlänge, die um so kleiner ist, je höher die Energie über dem Boden $-U$ der Grube ist, denn der Abstand zum Boden der Grube entspricht ja gerade der kinetischen Energie, die wiederum vom Impuls abhängt, und der bestimmt die De Broglie-Wellenlänge.

Was an den Rändern der Grube geschieht, haben wir schon bei der Abbildung 3.2 diskutiert: In den klassisch verbotenen Bereichen $x < 0$ und $x > a$ verhält sich die Wellenfunktion exponentiell ansteigend oder abfallend, und zwar so, dass sie nicht unbegrenzt wächst, wenn man weit von der Grube weg geht, sondern im Gegenteil gegen Null strebt, denn sonst gibt es Probleme mit dem Zusammenhang zwischen Wellenfunktion und Aufenthaltswahrscheinlichkeit (Stichwort: Normierung). Auch die Stärke dieses Abfalls ist fest durch die Energie vorgegeben.

Wir erhalten so

- links von der Grube ($x < 0$) eine (von links nach rechts) ansteigende Exponentialfunktion,
- in der Grube ($0 < x < a$) eine Welle, deren Wellenlänge durch den Wert der Energie fest vorgegeben ist, und
- rechts von der Grube ($x > a$) eine abfallende Exponentialfunktion.

Diese drei Funktionen müssen an den Rändern der Grube glatt aneinander angeschlossen werden, so dass bestimmte mathematische Bedingungen erfüllt sind, genauso wie bei der Stufe in Abbildung 3.2 und der Mauer in Abbildung 3.3. Bei dieser Rechnung, die wir hier nicht durchführen wollen⁶, stellt sich heraus, *dass das nur für ganz bestimmte Werte der Energie möglich ist*. Nur dann ist die Wellenlänge in der Grube so, dass die Anschlussbedingungen an beiden Rändern der Grube gleichzeitig erfüllt werden können.

Damit haben wir die **Quantisierung der Energie** für gebundene Zustände eines Teilchens an diesem einfachen Beispiel verstanden. Das ist natürlich ziemlich abstrakt und mathematisch, aber billiger ist es nicht zu haben. Wer eine anschauliche Analogie sucht, darf gern an eine Gitarre oder ein anderes Saiteninstrument denken: Auch dort ist die „Wellenfunktion“ der schwingenden Saite auf ganz bestimmte Wellenlängen festgelegt, einfach dadurch, dass die Saite an den Enden eingespannt ist. (Übrigens ist die Schrödingergleichung mathematisch gar nicht so weit entfernt von der Gleichung, die eine schwingende Saite beschreibt.)

Was wir hier an einem sehr einfachen Beispiel gesehen haben, funktioniert auch für kompliziertere Fälle. Schrödinger selbst hat sich gleich in seiner ersten Arbeit zur Quantenmechanik die Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem Proton vorgenommen, die das Wasserstoffatom zusammenhält. Die zugehörige potentielle Energie sieht komplizierter aus als die in Abbildung 3.5, und vor allem ist das Problem nicht eindimensional, sondern dreidimensional. Trotzdem konnte Schrödinger gleich im „ersten Anlauf“ das bis dahin rätselhafte Energiespektrum des Wasserstoffs erklären.

⁶Jede:r Physik Studierende verbringt mit diesem kleinen Beispiel ein paar unterhaltsame Stunden.

Ein Wasserstoffatom kann also verschiedene Zustände mit ganz bestimmten unterschiedlichen Energien einnehmen. Beim Übergang von einem Zustand in einen anderen ändert sich die Energie um

$$\Delta E = E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}}$$

und die Energiedifferenz wird in Form von elektromagnetischen Wellen der Frequenz f emittiert (wenn ΔE negativ ist, das Atom also Energie abgibt) oder absorbiert (wenn ΔE positiv ist). Dabei gilt die schon von Planck (Abschnitt 2.4) eingeführte Beziehung

$$|\Delta E| = hf.$$

(h ist die Planck-Konstante, und die Betragsstriche sind nötig, weil ΔE sowohl positiv als auch negativ sein kann, während Frequenzen üblicherweise positiv sind.)

In der Zeit zwischen zwei solchen Übergängen sollte das Atom sich „ruhig verhalten“; wir erwarten also keine Dynamik. Das bestätigt sich auch: Die Lösungen $\Psi(x, t)$ der Schrödingergleichung für bestimmte Energien haben die Eigenschaft, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(x, t)|^2$ *unabhängig von der Zeit t* ist. Daher nennt man die Zustände mit bestimmter Energie auch **stationäre Zustände**.

Der Übergang zwischen zwei stationären Zuständen eines Atoms, bei dem eine (winzig kleine) Energie ausgetauscht wird, wurde in der Frühzeit der Quantenmechanik gern als *Quantensprung* bezeichnet. Später hat sich dieses Wort etwas verselbständigt. Wenn Sie also heute hören, irgendeine Entwicklung sei ein „Quantensprung auf dem Gebiet XY“, also ein ganz gewaltiger Fortschritt, dann wissen Sie, dass der Urheber dieser Formulierung von Quantenphysik mit Sicherheit *keine Ahnung* hat.

Wie viele stationäre gebundene Zustände mit bestimmten Energien möglich sind, hängt natürlich im Einzelfall von der potentiellen Energie ab. In dem Fall aus Abbildung 3.5 gibt es um so mehr solche Zustände, je tiefer und breiter die Grube ist, je größer also die Werte von U und a sind. Die tiefste mögliche Energie muss größer sein als $-U$, wegen der Unschärfebeziehung. Wenn nämlich die Gesamtenergie des Teilchens den Wert $-U$ hätte, müsste seine kinetische Energie den Wert Null haben. Damit wäre aber der Impuls genau gleich Null und der Ort völlig unbestimmt, so dass das Teilchen nicht gebunden wäre.

Andererseits müssen die Tiefe U und die Breite a der Grube aber auch gewisse Mindestbedingungen erfüllen, damit überhaupt ein gebundener Zustand möglich ist. Das macht man sich wie folgt klar: Für ein gebundenes Teilchen wird erwartet, dass die Ortsunschärfe Δx ganz grob so groß ist wie a , denn das Teilchen hält sich ja in oder nahe bei der Grube auf. Über die Unschärferelation bedeutet das eine Mindestgröße für Δp (umgekehrt proportional zu Δx bzw. a). Dann erinnert man sich daran, dass nach Definition das Quadrat von Δp

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

war, wobei die Klammern $\langle \dots \rangle$ Mittelwerte sind. Der Mittelwert $\langle p \rangle$ ist aber Null, weil das Teilchen gebunden ist und damit im Mittel ruht. Damit hat das Teilchen der Masse m die kinetische Energie $\frac{(\Delta p)^2}{2m}$. Diese ist wegen der Unschärferelation proportional zu $1/a^2$ und wächst also, wenn a abnimmt. Falls sie dann größer ist als U (weil U oder a klein sind), hat das Teilchen insgesamt eine positive Gesamtenergie und kann damit nicht gebunden sein.

Die Unschärferelation haben wir ganz ähnlich schon einmal im Abschnitt 2.6 benutzt, um zu zeigen, warum nicht alle Elektronen in die Atomkerne stürzen und warum also die Materie in dem Zustand stabil ist, den wir kennen. Den Zustand niedrigster Energie nennt man in der Quantenmechanik **Grundzustand**. Wir haben gesehen, dass wegen der Unschärferelation die Grundzustandsenergie immer ein Stück größer ist als der niedrigste Wert der potentiellen Energie $V(x)$; diese Differenz nennt man auch die **Nullpunktsenergie**.

Die Quantisierung der Energie, also die Tatsache, dass die Energie nur bestimmte Werte haben kann, ist eines der erstaunlichsten und wichtigsten Phänomene der mikroskopischen Welt. Spektroskopische Untersuchungen zeigten schon im 19. Jahrhundert, dass Atome nur Licht mit ganz bestimmten Wellenlängen emittieren oder absorbieren können. Diese Wellenlängen stehen in ganz bestimmten Beziehungen zu einander, die man sich zunächst nicht erklären konnte.

Eine erste Erklärung lieferte Niels Bohr mit seinem Atommodell, in dem die Elektronen um den Kern kreisen wie die Planeten um die Sonne. Um zu erklären, dass ein so aufgebautes Atom überhaupt stabil ist und Licht mit den bekannten Wellenlängen aussenden oder aufnehmen kann, musste Bohr annehmen, dass die Elektronen sich nur auf ganz bestimmten Bahnen bewegen können. Dieses **Bohr'sche Atommodell** lieferte tatsächlich die beobachteten Wellenlängen und wird deshalb auch heute noch gern zur „Erklärung“ der atomaren Spektren verwendet. Eigentlich ist es aber *falsch*; wir wissen ja bereits, dass schon der Begriff der *Bahn* eines Elektrons wegen der Unschärferelation sinnlos ist. Die Annahmen über die „erlaubten Bahnen“ sind durch nichts begründet, außer dadurch, dass am Ende die richtigen Zahlen herauskommen. Für komplexere Systeme, etwa Moleküle, versagt das Bohrsche Atommodell vollkommen. Die korrekte Beschreibung durch die Schrödingergleichung ist allerdings leider nicht ganz so anschaulich und außerdem mathematisch etwas anspruchsvoller als Bohrs Modell.

Spektrum (Plural: Spektren), Spektroskopie

Als **Spektrum** bezeichnet man die Gesamtheit der in einem Bereich zu beobachtenden Wellenlängen (oder Frequenzen) der elektromagnetischen Strahlung, zusammen mit ihren jeweiligen Intensitäten. Wenn in einem Bereich alle Wellenlängen auftreten können, bezeichnet man das Spektrum als **kontinuierlich**, z.B. bei der Wärmestrahlung eines heißen Objekts. Wenn nur ganz bestimmte Wellenlängen auftreten können, nennt man das Spektrum **diskret**. Das ist beispielsweise für reine chemische Elemente der Fall. Diskrete Spektren nennt man auch **Linienspektren**, benannt nach dem Bild von farbigen Linien auf dunklem Hintergrund, das sich in einem optischen Spektrometer zeigt. Durch Untersuchung solcher Linienspektren in der **Spektralanalyse** stellt man fest, welche chemischen Elemente die untersuchte Substanz enthält. Die Untersuchung von Spektren nennt man **Spektroskopie**.

Allgemeiner bezeichnet man auch die möglichen Werte der Energie eines Quantensystems als **Energiespektrum**.

Im *Treffpunkt Quantenmechanik* gibt es zwei Experimente, die die Quantisierung der Energie von Atomen nachweisen, den *Franck-Hertz-Versuch* und das Experiment zur optischen *Spektroskopie*.

Im *Franck-Hertz-Versuch* werden freie Elektronen durch eine elektrische Spannung beschleunigt (also mit kinetischer Energie versehen), in einer Röhre durch verdünntes Neon-Gas geschickt, und am Ende werden die vom Gas durchgelassenen Elektronen als elektrischer Strom gemessen. Wenn man die Beschleunigungsspannung langsam erhöht, steigt der Strom der durchgelassenen Elektronen langsam an, bis er bei einer bestimmten Spannung U_0 abrupt abnimmt. Bei dieser Spannung haben die Elektronen gerade genug Energie, um ein Elektron in einem Neon-Atom vom Grundzustand des Atoms (dem Zustand niedrigster Energie) in einen *angeregten Zustand* mit höherer Energie zu befördern. Da die freien Elektronen ihre kinetische Energie in diesem Prozess abgeben haben, können sie das Gas nicht mehr durchqueren.

Der Strom der durchgelassenen Elektronen sinkt aber nicht ganz auf Null ab, da nicht jedes Elektron seine Energie abgibt. Erhöht man die Beschleunigungsspannung weiter, werden wieder mehr Elektronen durchgelassen, bis bei der Spannung $2U_0$ der Strom wieder abrupt abnimmt. Dann kann nämlich ein beschleunigtes Elektron seine Energie an ein Atom abgeben, danach noch einmal beschleunigt werden und noch einmal die gleiche Energie an ein anderes Atom abgeben. Bei weiterer Erhöhung der Beschleunigungsspannung geht es ähnlich weiter. Die durch die Stöße der freien Elektronen angeregten Atome können wieder in den Grundzustand zurückkehren, wobei sie Licht aussenden, dessen Frequenz von der Spannung U_0 abhängt. (Können Sie angeben, wie diese Beziehung als Formel aussieht?)

Im Versuch zur *Spektroskopie* benutzen Sie die Interferenz an einem Gitter (Abschnitt 2.3), um Licht in seine Anteile mit unterschiedlichen Wellenlängen zu zerlegen. Ein ganz anders beschaffenes Gitter benutzen Sie auch im Versuch *Elektronenbeugung* (Abschnitt 2.5), um die Welleneigenschaften von Elektronen nachzuweisen. Falls Sie sich mit beiden Versuchen befassen, ist es interessant, einmal die Wellenlängen zu vergleichen, um die es geht, und ebenso auch die Abmessungen der benutzten Gitter, also die Abstände zwischen den „Gitterstäben“.

Im Versuch *Spektroskopie* lernen Sie, wie man das verwendete Gerät richtig einstellt und wie man damit die Wellenlängen verschiedener Spektrallinien der Elemente Quecksilber (Hg) und Cadmium (Cd) bestimmt und die Energien der zugehörigen Übergänge zwischen verschiedenen stationären Zuständen der Atome berechnet.

Wenn Sie diese Technik beherrschen, könnten Sie beispielsweise feststellen, dass in der verwendeten Lichtquelle die Elemente Hg und Cd enthalten sind (wenn wir Ihnen das nicht schon verraten hätten). Durch spektroskopische Techniken kann man die chemische Zusammensetzung von Proben ermitteln, die für eine konventionelle Analyse zu wenig Material enthalten, oder die überhaupt nicht direkt zugänglich sind, weil sie sich weit weg in der Erdatmosphäre oder sogar im Weltall befinden.

Die Verfahren zur spektroskopischen Analyse, etwa von Luftschadstoffen oder von industriellen Produktionsprozessen sind heutzutage aber weitestgehend automatisiert und werden mit kommerziellen Geräten durchgeführt; da muss niemand mehr ein Spektrometer einjustieren. Die Grundlage ist aber immer noch die Quantenmechanik, und für besondere Situationen oder extreme Genauigkeit ist immer noch physikalisches Fingerspitzengefühl gefragt.

Diskrete und kontinuierliche Energiespektren

Wir haben bisher, ausgehend von dem einfachen „Gruben“-Potential in Abbildung 3.5, zunächst die gebundenen Zustände betrachtet, die nur ganz bestimmte Energien ha-

ben konnten. Solche einzeln liegenden Energiewerte werden in der Physik als **diskrete** Energien bezeichnet; in unserem Fall waren die Energien der gebundenen Zustände negativ. Ein Teilchen mit positiver Energie ist im Gegensatz dazu in dem Potential aus Abbildung 3.5 nicht gebunden. Da die (Gesamt-) Energie entlang der gesamten x -Achse größer ist als die potentielle Energie, hat die Schrödingergleichung in allen Bereichen eine Welle als Lösung und damit kann sich das Teilchen überall aufhalten. Seine Wellenlänge hat links und rechts von der Grube den gleichen Wert. Im Bereich der Grube ist die kinetische Energie des Teilchens größer, weil die potentielle Energie kleiner ist, und damit ist die Wellenlänge kürzer.

Wie zuvor bei den gebundenen Zuständen müssen die Wellen mit den unterschiedlichen Wellenlängen an den Stellen $x = 0$ und $x = a$ so aneinander angefügt werden, dass die Schrödingergleichung erfüllt ist. Dabei zeigt sich, dass eine von links kommende Welle nicht vollständig in den Bereich rechts durchgelassen (transmittiert) wird, sondern teilweise reflektiert wird. Dieses Verhalten ist ganz anders als das eines klassischen Teilchens: Wenn dieses mit genügend kinetischer Energie von links kommt, wird es *auf jeden Fall* nach rechts weiter fliegen. Wir hatten diesen Unterschied zwischen klassischem und quantenmechanischem Verhalten schon bei der „Stufe“ in der potentiellen Energie (Abbildung 3.2) gesehen.

Die Schrödingergleichung lässt sich hier für beliebige (positive) Werte der Energie lösen; die reflektierten und transmittierten Anteile der Welle hängen von der Energie ab. Die entsprechenden Zustände sind nicht gebunden, da sich die Wellenfunktionen über die gesamte x -Achse erstrecken, und das zugehörige Energiespektrum ist **kontinuierlich**: alle positiven Energien sind möglich. Ein kontinuierliches Energiespektrum liegt immer vor, wenn die potentielle Energie nicht in beiden Richtungen unbegrenzt anwächst. Unterhalb des kontinuierlichen Spektrums *kann* es gebundene Zustände mit einem diskreten Energiespektrum geben. Es ist aber auch möglich, dass die potentielle Energie „nicht stark genug“ ist, um einen gebundenen Zustand zu besitzen; in unserem Beispiel etwa, wenn die Grube zu flach oder zu schmal ist.

Die Tatsache, dass eine einlaufende Welle nicht einfach ungestört weiter läuft, sondern teils reflektiert und teils transmittiert wird, ist ein einfaches Beispiel für einen **Streuprozess**. Als Streuprozess wird in der Physik jeder Vorgang bezeichnet, bei dem eine Welle (egal ob klassische Lichtwelle oder quantenmechanische Materiewelle) durch die Wechselwirkung mit einem „Zielobjekt“ verändert wird. Sehr viele Experimente der Physik sind Streuexperimente, beispielsweise in der Teilchenphysik, aber auch in anderen Gebieten der Physik, etwa immer dann, wenn es darum geht, die Struktur von Teilchen, Atomen, Molekülen, biologischen Systemen oder Festkörpern aufzuklären.

Im realen, dreidimensionalen Leben gibt es ja viel mehr Möglichkeiten als nur Reflexion oder Transmission. Die einfallende Welle kann in verschiedene Richtungen verschieden stark abgelenkt werden und dieses Muster kann sich mit der Wellenlänge ändern; noch komplizierter wird es, wenn die Welle Energie mit dem Untersuchungsobjekt austauscht und so Veränderungen hervorruft. Weite Teile der physikalischen Forschung bestehen darin, solche Streuprozesse theoretisch vorherzusagen (mit mehr oder weniger komplizierten Rechnungen) oder genau auszumessen (mit mehr oder weniger komplizierten Messungen). Aus den gemessenen Streudaten gewinnt man Informationen über die Struktur des streuenden Objekts und über die Art der Wechselwirkung zwischen der einfallenden Welle (dem einfallenden Teilchen) und dem Untersuchungsobjekt.

3.2 Was geschieht bei einer Messung?

Was bei einer Messung in der Quantenmechanik geschieht, ist für unseren an klassischen Phänomenen geschulten Verstand so ungewohnt, dass es hier etwas näher dargestellt werden soll, auch wenn grundlegende Fakten schon in den Abschnitten 1.5 und 2.4 aufgetaucht sind.

In der klassischen Welt machen wir uns nie Gedanken darüber, ob eine Messung den Zustand des untersuchten Systems beeinflusst. Wir nehmen auch immer an, dass die gemessene Größe einen bestimmten Wert hat, unabhängig davon, ob wir sie messen oder nicht: Eine Batterie liefert zum Beispiel eine Spannung von 1,5V, egal ob ich sie messe oder nicht. Meine Masse beträgt zum Beispiel 77kg, egal ob ich auf die Waage steige oder nicht; sie ändert sich auch nicht, wenn ich wieder von der Waage herunter steige, nachdem ich den Wert abgelesen habe.

Ein einfaches System in der klassischen Mechanik besteht aus Teilchen, die sich unter dem Einfluss von bestimmten Kräften im Raum bewegen. Der Zustand eines solchen Systems ist vollständig bekannt, wenn man für jedes einzelne Teilchen Ort und Impuls kennt. Die klassischen Bewegungsgleichungen liefern dann die weitere Entwicklung des Zustands, also die zukünftigen Werte der Orte und Impulse aller Teilchen. Alle klassischen Messgrößen hängen von den Werten dieser Orte und Impulse ab (und von nichts sonst). Wenn also der Zustand eines klassisch-mechanischen Systems bekannt ist, sind auch die Werte aller Messgrößen festgelegt: Eine klassische Messgröße hat schon vor der Messung einen bestimmten Wert und dieser Wert wird durch die Messung nicht verändert.

Bewegungsgleichungen

In der Physik sind Bewegungsgleichungen immer Differenzialgleichungen, d.h. sie geben zu einem bestimmten Zeitpunkt t an, wie sich der Zustand zeitlich ändert (mathematisch: Ableitungen nach der Zeit). Daraus kann der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt berechnet werden.

Für ein *klassisches* Teilchen ist die Bewegungsgleichung durch die Gesetze von Newton gegeben, z.B. in der Form „Kraft = Masse mal Beschleunigung“. Wenn die Kraft bekannt ist, kann aus der Beschleunigung berechnet werden, wie sich die Geschwindigkeit ändert, und daraus dann, wie sich der Ort ändert. Dann kann man die Bahn des Teilchens im Raum verfolgen, z.B. für einen Satelliten, der um die Erde kreist.

Die Bewegungsgleichung für ein *quantenmechanisches* Teilchen ist die Schrödingergleichung, eine Differenzialgleichung für die Wellenfunktion. Wegen der heisenbergschen Unschärferelation gibt es für ein quantenmechanisches Teilchen (z.B. ein Elektron in einem Atom) den Begriff der Bahn nicht.

In der Quantenmechanik ist der Zusammenhang zwischen dem Zustand eines Systems, dessen zeitlicher Entwicklung und Messungen anders, wie schon in den Abschnitten 1.5 und 2.4 angesprochen. Das sieht man schon am Beispiel eines einzigen Teilchens, das sich in einer Dimension bewegt. Der Zustand des Teilchens ist vollständig bestimmt, wenn man die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ zu einer bestimmten Zeit t kennt. Die

Schrödingergleichung bestimmt die weitere Entwicklung des Zustands, also die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ für spätere Zeiten, aber nur *solange keine Messung erfolgt*. Eine Messung verändert den Zustand $\Psi(x, t)$ des Teilchens, abhängig vom Ergebnis der Messung. Eine quantenmechanische Messgröße hat also *nicht schon vor der Messung* einen bestimmten Wert. Der Zustand $\Psi(x, t)$ unmittelbar nach der Messung ist durch den gemessenen Wert festgelegt und entwickelt sich dann weiter gemäß der Schrödingergleichung — bis zur nächsten Messung.

Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Der Zustand eines Teilchens in einer Dimension zur Zeit t ist durch die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ *vollständig* bestimmt. Trotzdem ist das Ergebnis einer **Einzelmessung** (also einer einmaligen Messung) des Orts x (oder einer anderen Messgröße) nicht vorhersagbar. Wenn man aber sehr oft hintereinander folgende Operationen durchführt:

1. Stelle den Zustand $\Psi(x, t)$ her,
2. Messe den Ort x und
3. Registriere das Ergebnis der Ortsmessung,

dann stellt sich allmählich die Verteilung der Messergebnisse des Orts ein, die durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ gegeben ist.

Im Unterschied zu einer Einzelmessung ist das eine statistische Messung; Experten sprechen oft von **Ensemblemessungen**. Wichtig ist, dass man das System immer wieder neu *präpariert*, also den Ausgangszustand $\Psi(x, t)$ herstellt. Alternativ kann man sich auch eine große Anzahl von Teilchen vorstellen, die alle im gewünschten Zustand $\Psi(x, t)$ sind (ein Ensemble von Teilchen), und an jedem Teilchen wird ein einziges Mal gemessen.

Nach einer Einzelmessung ist der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* $\Psi(x, t)$, sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat.

Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.

Messungen verändern Zustände

Wenn ein Teilchen in einem Zustand Ψ ist und an diesem Teilchen eine (Einzel-) Messung durchgeführt wird, dann ist nach der Messung der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* Ψ , sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat. *Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.*

Ein einfaches Beispiel ist eine Messung, die feststellt, „auf welcher Seite“ ein Teilchen ist, also bei $x > 0$ („rechts“) oder bei $x \leq 0$ („links“). Vor der Messung, im Zustand Ψ , hält sich das Teilchen mit einer gewissen Wahr-

scheinlichkeit links und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit rechts auf. (Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten beträgt natürlich Eins.) Die Messung versetzt das Teilchen *entweder* in einen Zustand Ψ_{rechts} *oder* in einen Zustand Ψ_{links} . Wenn der Messwert „rechts“ gemessen wurde und man führt unmittelbar nach der ersten Messung eine zweite durch (ohne ansonsten irgendwie auf das Teilchen einzuwirken), dann wird das Ergebnis mit Sicherheit wieder „rechts“ sein.

Die erste Messung hat hier den Zustand festgelegt. Man sagt, der anfängliche Zustand Ψ sei zum Zustand Ψ_{rechts} **kollabiert** oder auf diesen Zustand **reduziert** worden. Die Zustände Ψ_{rechts} und Ψ_{links} bezeichnet man als **Eigenzustände** der Messgröße „Seite“. Ein Eigenzustand ist ein Zustand, in dem die Messung der zugehörigen Größe mit Sicherheit einen ganz bestimmten Wert (den **Eigenwert**) liefert.

Nach der Messung entwickelt sich der Zustand des Teilchens gemäß der Schrödingergleichung weiter, und damit kann sich das Teilchen möglicherweise auch wieder nach links bewegen, so dass die durch die Messung festgelegte Eigenzustands-Eigenschaft wieder verloren geht. Darum erhält man auch nur dann bei den beiden geschilderten Messungen gleiche Ergebnisse, wenn sie *unmittelbar* nacheinander ausgeführt werden.

Bis auf „technische Details“ ist damit eigentlich alles über die Rolle von Messungen in der Quantenmechanik gesagt. Allerdings lohnt es sich, die Details im Folgenden etwas näher anzuschauen, um zu verstehen (oder sich daran zu gewöhnen), was in der Quantenwelt anders ist als in der klassischen Alltagswelt. Die Unterschiede sind so wichtig und so überraschend, dass der Messprozess in Physik und Philosophie schon so lange diskutiert wird, wie es die Quantenmechanik in ihrer heutigen Form gibt, also seit etwa einem Jahrhundert.

Der Vergleich zwischen einem klassisch-mechanischen und einem quantenmechanischen System zeigt einen wichtigen Unterschied: Im klassischen System entwickelt sich der Zustand immer *deterministisch* (also vorhersagbar), und Messungen haben darauf keinen Einfluss. Im quantenmechanischen System gibt es *zwei* Arten von Zustandsänderungen: Die Schrödingergleichung liefert ebenfalls eine *deterministische* Änderung des Zustands $\Psi(x, t)$, die Messung bewirkt aber eine *zufällige* Änderung, wobei der Zustand nach der Messung vom gemessenen Wert abhängt. Der Zufall kommt also bei der Messung ins Spiel.⁷

Um zu verstehen was hier vor sich geht, müssen wir die Begriffe aufgreifen, die im Info-Kasten „Messungen verändern Zustände“ erwähnt wurden. Zu jeder Messgröße gibt es quantenmechanische Zustände (also Wellenfunktionen), in denen die Messgröße einen ganz bestimmten, eindeutig festgelegten Wert hat. Solche Zustände nennt man **Eigenzustände** der Messgröße und die zugehörigen Werte heißen **Eigenwerte**. Wenn nun die Eigenwerte aller Eigenzustände voneinander verschieden sind, dann kann man *jeden* möglichen Zustand des betrachteten Systems als Überlagerung der Eigenzustände unserer Messgröße darstellen.⁸ Jeder Eigenzustand geht in diese Überla-

⁷Schon die Unterscheidung zwischen zwei Arten von Zustandsänderungen sorgt für einige der erwähnten Diskussionen, die wir hier nicht näher schildern wollen. Unsere Darstellung entspricht der Deutung, die die meisten praktizierenden Wissenschaftler benutzen und die die Ergebnisse von Experimenten gut wiedergibt.

⁸Hier wird nur der einfachste mögliche Fall dargestellt; kompliziertere Fälle erfordern mehr formalen und mathematischen Aufwand, bringen aber keine neue Erkenntnis.

gerung mit einer bestimmten Amplitude ein, und diese Amplitude bestimmt *die Wahrscheinlichkeit, den zugehörigen Eigenwert zu messen*. Jede Messung kann nur einen der Eigenwerte liefern; andere Messergebnisse sind nicht möglich.

Amplitude

Die **Amplitude** ist die maximale Auslenkung einer Welle, also z.B. bei einer Wasserwelle die Höhe des Wellenbergs über der ruhigen Wasseroberfläche. Außer der Amplitude ist auch die **Phase** einer Welle wichtig, die bestimmt, wo z.B. genau die Wellenberge liegen.

Bei Überlagerungen von Wellen sind sowohl die Amplituden als auch die Phasen der Teilwellen wichtig, Stichwort Interferenz.

Bei einer Überlagerung von mehreren quantenmechanischen Wellenfunktionen spricht man ebenfalls von den Amplituden der verschiedenen Wellenfunktionen und meint damit die jeweiligen (als komplexe Zahlen ausgedrückten) Anteile.

Eine einzelne Messung liefert also einen der möglichen Eigenwerte, und der Zustand unmittelbar nach der Messung ist der zugehörige Eigenzustand. Alle anderen Eigenzustände, die zuvor auch noch in der Überlagerung vorhanden waren, werden eliminiert, ihre Amplituden sind also nach der Messung Null. Nach dieser *schlagartigen und zufälligen* Änderung entwickelt sich der Zustand des Systems wieder kontinuierlich und deterministisch weiter, wie es die Schrödingergleichung beschreibt. Dabei wird sich der Zustand verändern und das System wird nicht in dem zuvor gemessenen Eigenzustand bleiben. Beispielsweise wird ein Teilchen unter dem Einfluss von Kräften seinen Ort oder seine Bewegungsrichtung ändern. Die Amplituden der durch die Messung eliminierten Zustände werden also nicht Null bleiben, und eine zweite Messung nach einiger Zeit wird wieder irgendeinen der möglichen Eigenwerte liefern, wobei der Zustand des Systems wieder auf den dazu gehörigen Eigenzustand „reduziert“ wird. (Manchmal spricht man auch etwas dramatisch vom „Kollaps“ des Zustands.)

Die Tatsache, dass Messungen zufällige Ergebnisse liefern, lässt sich also darauf zurückführen, dass Zustände des Systems sich als Überlagerungen von Eigenzuständen der Messgröße darstellen lassen. Das klingt recht abstrakt, aber wir haben ja gerade im Detail gesehen, was das bedeutet. Richard Feynman (Nobelpreis 1965), der intensiv über die Quantenmechanik nachgedacht hat, sagt am Anfang seiner ersten Vorlesung über Quantenphysik sinngemäß, das Superpositionsprinzip (jede Überlagerung von möglichen Zuständen ist auch ein möglicher Zustand) sei „das einzige Mysterium der Quantenmechanik“.

Dadurch, dass Messungen Zustände verändern, beeinflussen sie sich auch gegenseitig. Wir betrachten dazu zwei verschiedene Messgrößen, die wir A und B nennen wollen. Jede der beiden Größen besitzt Eigenwerte und Eigenzustände; es gibt also A -Eigenzustände und B -Eigenzustände. Jeden beliebigen Zustand des betrachteten Systems können wir sowohl als Überlagerung von A -Eigenzuständen als auch als Überlagerung von B -Eigenzuständen darstellen⁹. Wir gehen nun von irgendeinem Zustand aus und messen A . Als Messergebnis erhalten wir, wie vorhin beschrieben, einen der

⁹Das ist in der Regel unproblematisch; die genauen mathematischen Bedingungen dafür wollen wir hier nicht besprechen.

Eigenwerte von A , und nach der Messung ist das System in einem A -Eigenzustand. Dieser Zustand lässt sich, wie alle Zustände, als Überlagerung von B -Eigenzuständen darstellen, und wenn wir sofort im Anschluss an die A -Messung die Größe B messen, erhalten wir einen der Eigenwerte von B und das System ist in einem B -Eigenzustand. So weit, so gut. Wenn wir aber umgekehrt erst B und dann A messen, liegt am Ende ein A -Eigenzustand vor, anders als bei der Messung in umgekehrter Reihenfolge!

Die Messungen von A und B sind also nicht miteinander vertauschbar, es sei denn, jeder A -Eigenzustand ist auch B -Eigenzustand und umgekehrt. Dann sind die Messungen miteinander vertauschbar und wenn die Messung von A einen „scharfen“ Wert liefert (weil das System in einem A -Eigenzustand ist), dann liefert auch die Messung von B einen scharfen Wert, weil der A -Eigenzustand eben auch ein B -Eigenzustand ist. Die beiden Größen sind also, wie man sagt, *gleichzeitig scharf messbar*.

Wenn die Messungen von A und B dagegen *nicht* miteinander vertauschbar sind, dann ist der A -Eigenzustand, der sich nach der Messung von A ergibt, zusammengesetzt aus *mehreren* B -Eigenzuständen, so dass das Ergebnis der B -Messung zufällig ist; die beiden Größen sind also *nicht* gleichzeitig scharf messbar. Damit haben wir die Ursache der **allgemeinen Unschärfebeziehung** kennengelernt, die für jedes Paar von Größen gilt, die kein System von gemeinsamen Eigenzuständen besitzen. Das ist jetzt deutlich weniger anschaulich als die Betrachtungen zur Unschärfebeziehung zwischen Ort und Impuls in Abschnitt 2.6, dafür hat es aber eine viel allgemeinere Gültigkeit.

Wenn man sich etwas näher auf den mathematischen Formalismus der Quantenmechanik einlässt, kann man diese Aussagen am Beispiel nachvollziehen. Die Zustände eines quantenmechanischen Systems können durch Wellenfunktionen dargestellt werden, wie wir schon gesehen haben. Messgrößen werden durch **Operatoren** dargestellt, die an den Zuständen gewisse mathematische Operationen vornehmen – wie der Name schon sagt. In der Darstellung mithilfe von Wellenfunktionen ist das allerdings technisch nicht ganz einfach. Darum werden wir Operatoren erst später diskutieren, nämlich im Abschnitt 5.1. Dort wird eine Version der Quantenmechanik benutzt, die die Zustände durch **Vektoren** und die Operatoren durch **Matrizen** darstellt und die mathematisch so einfach ist, dass man die obigen Aussagen über Messungen und Unschärfen einfach nachrechnen kann.

Um diese abstrakten Betrachtungen in einem konkreten Experiment zu bestätigen, eignet sich der Versuch *Polarisation des Lichts* im *Treffpunkt Quantenmechanik* sehr gut.

Polarisation des Lichts

Elektromagnetische Wellen bestehen aus miteinander gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern, die sich in Raum und Zeit verändern. Bei einer monochromatischen (nur eine Frequenz bzw. Wellenlänge) ebenen Welle im freien Raum stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander und beide stehen senkrecht auf der Richtung, in der das Licht sich ausbreitet. Wenn das elektrische Feld nur in einer Richtung hin und her schwingt, spricht man von einer **linear polarisierten** Welle. Wenn man in Richtung der Wellenausbreitung schaut, kann man zwei grundsätzlich verschiedene Polarisationen (Schwingungsrichtungen) unterscheiden: „rechts und links“ (x -Polarisation) und „auf und ab“ (y -Polarisation). Alle

komplizierteren Wellenformen kann man aus diesen Grundformen zusammensetzen.

Im Experiment betrachten wir eine Lichtquelle, einen Laser, dessen Licht wir klassisch als eine elektromagnetische Welle ansehen können, oder quantenmechanisch als eine Ansammlung von Photonen. Beide Betrachtungsweisen können die Versuchsergebnisse gut erklären, wie wir sehen werden. Die quantenmechanische Überlegung zeigt uns zugleich ein Beispiel dafür, wie eine Messung den Zustand eines Systems beeinflusst.

Der Laser liefert also eine elektromagnetische Welle, die wir auf einem Schirm als hellen Fleck beobachten können. Aus der Sicht der Quantenmechanik regt der Laser Photonen an, die auf dem Schirm einen hellen Fleck hervorrufen. (Warnhinweis: Wie schon am Ende des Abschnitts 2.5 gesagt, sollten wir uns die Photonen nicht zu „teilchenartig“ vorstellen. Sie sind Energiequanten einer bestimmten Schwingungsform des elektromagnetischen Feldes und sind erst dann an einem bestimmten Ort lokalisiert, wenn sie vom Auge oder einem anderen Detektor registriert werden.)

Um die Polarisation des Lichts zu messen, werden Polarisationsfilter benutzt. Ein Polarisationsfilter besteht aus einer Substanz (meist eine spezielle Kunststoffolie), die nur Lichtwellen mit einer bestimmten Polarisation durchlässt. Meist sind Polarisationsfilter drehbar gelagert, so dass man die Richtung der durchgelassenen Polarisation einstellen kann. So ist es auch im Experiment im *Treffpunkt Quantenmechanik*. Für die Diskussion hier wollen wir die Einstellungen durch Richtungspfeile darstellen; ein \uparrow -Filter lässt dann nur elektromagnetische Wellen bzw. Photonen durch, deren elektrisches Feld „auf und ab“ schwingt. Entsprechend lässt ein \rightarrow -Filter nur Wellen durch, deren elektrisches Feld „hin und her“ schwingt.

Dann können wir zu experimentieren beginnen und die Ergebnisse auf *klassische* Art verstehen. Zunächst wird ein \uparrow -Filter in den Strahl gebracht. Nachdem das Licht den Filter passiert hat, ist es vollständig \uparrow -polarisiert. Ein zweiter Filter in \uparrow -Richtung lässt dieses Licht natürlich durch, wie man auf dem Beobachtungsschirm sieht.

Wird der zweite Filter aber in \rightarrow -Richtung gedreht, kommt kein Licht mehr durch und der Beobachtungsschirm wird dunkel. Ist der zweite Filter dagegen in \nearrow -Richtung orientiert, kommt noch Licht am Schirm an, denn das elektrische Feld des vom ersten Filter durchgelassenen \uparrow -Lichts lässt sich zerlegen in einen Anteil in \nearrow -Richtung, der durchgelassen wird und einen gleich großen Anteil in \nwarrow -Richtung, der nicht durchgelassen wird.

Das ist alles nicht überraschend, wenn man einmal verstanden hat, was Polarisation eigentlich bedeutet, nämlich die Richtung des elektrischen Feldes. Verblüffend ist aber zunächst folgendes Experiment: Hinter den \uparrow -Filter wird ein \rightarrow -Filter gebracht; der Schirm ist dann natürlich dunkel. Bringt man aber *zwischen* die beiden Filter einen dritten, der in \nearrow -Richtung eingestellt ist, *wird es auf dem Schirm wieder hell*.

Um das zu verstehen, muss man einfach nur verfolgen, was mit dem elektrischen Feld geschieht. Nach dem ersten Filter zeigt es in \uparrow -Richtung. Der zweite Filter sorgt für eine Zerlegung dieses \uparrow -Feldes in einen Anteil in \nearrow -Richtung (durchgelassen) und einen Anteil in \nwarrow -Richtung (gesperrt). Danach zeigt das Feld also in \nearrow -Richtung; es kann zerlegt werden in einen \uparrow -Anteil (gesperrt) und einen \rightarrow -Anteil, der durchgelassen wird.

Die *quantenmechanische* Analyse der Experimente betrachtet einzelne Photonen. Ein \uparrow -Filter führt an jedem Photon eine Messung der „ \uparrow -Polarisation“ aus. Die möglichen Messergebnisse sind dann entweder \uparrow , und das Photon wird durchgelassen, oder \rightarrow , und das Photon wird absorbiert. Ein \rightarrow -Filter misst die gleiche Messgröße, aber es wird die andere Polarisation durchgelassen. Hinter dem \uparrow -Filter sind also alle Photonen im Zustand \uparrow und werden deshalb von einem weiteren \uparrow -Filter mit Sicherheit durchgelassen, von einem \rightarrow -Filter aber mit Sicherheit nicht.

Ist der zweite Filter in \nearrow -Richtung orientiert, wird eine Messung der „ \nearrow -Polarisation“ durchgeführt. Das einlaufende \uparrow -Photon ist in einem Überlagerungszustand aus \nwarrow und \nearrow . Wenn das Messergebnis \nwarrow ist, ist das Photon nach der Messung im \nwarrow -Zustand, der aber vom Filter absorbiert wird. Ist das Messergebnis aber \nearrow , dann ist das Photon im \nearrow -Zustand und wird durchgelassen.

Das Experiment mit drei Filtern in der Reihenfolge \uparrow , \nearrow , \rightarrow hat auch in der Quantenmechanik eine einfache Erklärung. Wie gerade gesehen, ist das Photon nach den beiden ersten Filtern im \nearrow -Zustand (oder es ist absorbiert worden). Dann führt der letzte Filter (\rightarrow) wieder eine Messung der „ \uparrow -Polarisation“ aus. Der \nearrow -Zustand ist eine Überlagerung zu gleichen Teilen, aus dem \uparrow -Zustand und dem \rightarrow -Zustand. Wenn das Messergebnis des letzten Filters \uparrow ist, ist das Photon nach der Messung im \uparrow -Zustand, der vom Filter nicht durchgelassen wird. Ist das Messergebnis \rightarrow , ist das Photon nach der Messung im \rightarrow -Zustand und gelangt auf den Schirm.

Die quantenmechanische Analyse der Polarisationsexperimente macht auch klar, dass *Messungen in der Regel nicht miteinander vertauschbar* sind. Zwei Filter in der Reihenfolge „erst \uparrow , dann \nearrow “ liefern am Ende ein Photon, das entweder im Zustand \nearrow ist oder im Zustand \nwarrow (und leider absorbiert wurde). In der Reihenfolge „erst \nearrow , dann \uparrow “ ergibt sich entweder der Zustand \rightarrow (absorbiert) oder der Zustand \uparrow , also definitiv ein anderer Zustand als bei der vorherigen Reihenfolge der Messungen.

Man kann es störend finden, dass bei der Polarisationsmessung an einzelnen Photonen mit Polarisationsfiltern immer eins der möglichen Messergebnisse sofort durch Absorption im Filter „zerstört“ wird, aber gerade dadurch kommt die perfekte Übereinstimmung mit der klassischen Analyse zustande: Hinter dem Filter gibt es nur noch die „richtig“ polarisierten Photonen, und aus sehr vielen davon setzt sich das „richtig“ polarisierte elektrische Feld der klassischen Welle zusammen.

Am Ende halten wir fest: In der Quantenmechanik gibt es *zwei Arten von Zustandsänderungen*. Die Schrödingergleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion deterministisch, also vorhersagbar; Messungen ändern den Zustand eines Systems dagegen in zufälliger Art. Die Möglichkeiten und das Ausmaß des Zufalls sind bestimmt durch den Zustand vor der Messung. Nur wenn der Zustand vor der Messung ein Eigenzustand der Messgröße ist, ist das Messergebnis vollständig festgelegt, und mit ihm auch der Zustand nach der Messung. Ein Beispiel dazu sind die stationären Zustände (Abschnitt 3.1), z.B. die gebundenen Zustände eines Atoms. Stationäre Zustände haben eine bestimmte Energie, sind also Eigenzustände der Energie und deshalb kann man die Energie messen, so oft man will, es wird sich immer derselbe Wert ergeben und der Zustand wird sich nicht ändern. Wenn der Zustand vor der Messung dagegen kein Eigenzustand der Messgröße ist, ist das Messergebnis zufällig und der Zustand nach der Messung hängt von diesem zufälligen Messergebnis ab.

Wie schon erwähnt, ist der Messprozess nach wie vor Gegenstand von Diskussionen, und es gibt verschiedene Ansätze, ihn in der einen oder anderen Hinsicht „schöner“

oder „genauer“ zu beschreiben. Die hier wiedergegebene Beschreibung wird von den meisten praktizierenden Physiker:innen akzeptiert, ist vergleichsweise einfach und beschreibt die Experimente gut.

Kapitel 4

Wie alles anfing: Die Entdeckung der Quanten.

Die elektromagnetische Strahlung besteht aus Quanten, Materie besteht aus Atomen, und die bestehen wiederum aus Elektronen, Protonen und Neutronen. Diese Aussagen gehören heute zu den selbstverständlichen Grundlagen eines modernen Weltbilds. Bis etwa zum Jahr 1900 hätte allerdings niemand mit diesen Begriffen irgendetwas anfangen können. Eine Reihe von Entdeckungen und „unerklärlichen“ Beobachtungen führte dann zu einer vollständigen Neuordnung in den Grundlagen der Physik.

Einige der grundlegenden Experimente können Sie im *Treffpunkt Quantenmechanik* nachvollziehen. In diesem Kapitel sollen sie kurz besprochen werden. Die technischen Details zur Durchführung der Experimente sind dann in den einzelnen Versuchsanleitungen zu finden.

Die Widersprüche in den Theorien zum Spektrum der *Schwarzkörperstrahlung* zwangen Max Planck zu der Annahme, dass das elektromagnetische Strahlungsfeld Energie nur in ganz bestimmten „Portionen“ aufnehmen oder abgeben kann, eben den Quanten. Die Erklärung, die Albert Einstein für die Messergebnisse zum *Photoeffekt* gab, beruhte ebenfalls auf der Existenz von Quanten. Der *Millikan-Versuch* zeigte schließlich, dass die elektrische Ladung nur in Vielfachen einer kleinsten Einheit auftreten kann, also auch quantisiert ist.

Um Entdeckungen zu machen, benötigt man bestimmte Beobachtungstechniken und Geräte. Eine schon lange bekannte Technik ist die *Spektroskopie*, deren Befunde aber erst durch die Quantenmechanik erklärt wurden. Die *Detektion einzelner Photonen* ist dagegen erst durch die Verwendung moderner Bauelemente möglich geworden, deren Funktion selbst auf quantenmechanischen Effekten beruht.

Photonen besitzen nicht nur Energie, sondern auch Impuls. Das beweist der *Compton-Effekt*, der „Zusammenstoß“ eines einzelnen Photons mit einem einzelnen Elektron. Diesen Effekt können wir im *Treffpunkt Quantenmechanik* leider nicht durchführen, da dazu Röntgenstrahlung notwendig ist, die nur unter besonderen Sicherheitsvorkehrungen von geschultem Personal verwendet werden darf. Der Vollständigkeit halber soll der Compton-Effekt aber am Ende dieses Kapitels erklärt werden.

4.1 Schwarzkörperstrahlung

Wenn ein Stück Eisen erhitzt wird, erscheint es dem Auge zuerst rot und bei noch höherer Temperatur gelb bis weiss. Die Zusammensetzung der vom glühenden Metall emittierten Strahlung ändert sich also, und in der Stahlindustrie wird z.B. die Temperatur des Materials mithilfe der Strahlung gemessen. Da jedes Stück Eisen eine unterschiedliche Form und Oberflächenbeschaffenheit hat, ist es praktischer, Messungen auf ein Standardsystem zu beziehen, den idealen schwarzen Körper. Wie der Name schon sagt, absorbiert ein solcher Körper sämtliche einfallende Strahlung. Ein Beispiel für einen „ziemlich guten“ schwarzen Körper ist ein kleines Loch in der Wand eines Hohlraums, dessen Wände (und damit auch dessen Inneres) eine bestimmte Temperatur haben. Strahlung, die von außen einfällt, verschwindet in dem Loch und heraus kommt nur die Strahlung, die aufgrund der Temperatur im Inneren vorhanden ist. Das ist die Schwarzkörperstrahlung, früher auch Hohlraumstrahlung genannt.

Wenn man das Spektrum, also die Verteilung dieser Strahlung über die verschiedenen Wellenlängen, ausmisst, findet man wenig Strahlungsintensität bei besonders kurzen und besonders langen Wellenlängen, und dazwischen ein Maximum der Intensität. Dieses Maximum verschiebt sich mit steigender Temperatur hin zu kürzeren Wellenlängen, etwa von Rot nach Gelb, wie beim Stück Eisen geschildert.

Mit den Mitteln der klassischen Wärmelehre und der klassischen Theorie elektromagnetischer Phänomene konnte das Verhalten bei großen Wellenlängen gut erklärt werden. Bei kleinen Wellenlängen gab es allerdings ein Problem. Da, grob gesprochen, um so mehr Wellen in einen strahlenden Hohlraum passen, je kleiner die Wellenlänge ist, sollte das Maximum der Intensität bei sehr kurzen Wellenlängen liegen, im Widerspruch zur Beobachtung. Es gab zwar eine andere Theorie, die das Verhalten bei kleinen Wellenlängen richtig beschrieb, aber die versagte bei großen Wellenlängen.

Max Planck entwickelte die Vorstellung, dass die Hohlraumstrahlung von schwingungsfähigen Systemen (Oszillatoren) erzeugt wird, die jeweils mit einer bestimmten Frequenz f schwingen und Energie nur in Vielfachen des Energiequantums

$$E = hf$$

abgeben oder aufnehmen können. (h ist die Planck-Konstante.)

Im *Treffpunkt Quantenmechanik* verwenden Sie keinen Hohlraum, in dem die Strahlung entsteht, sondern der (einfache, aber brauchbare) Ersatz für den idealen schwarzen Körper ist die Glühwendel einer Halogenlampe, die eine sehr hohe Temperatur hat. Ein optisches Gitter, wie es auch im Versuch *Spektroskopie* verwendet wird, spaltet die Strahlung je nach Wellenlänge in verschiedene Richtungen auf. Mit einem kleinen Photoelement¹ können Sie dann die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge ausmessen.

4.2 Photoeffekt

Wenn man eine Metalloberfläche mit Licht bestrahlt, kann man Ladungen aus ihr herauslösen; das wurde zuerst in den 1880er Jahren beobachtet. Genauere Untersuchungen

¹Ein Photoelement ist ein Lichtsensor, in dem ein einfallendes Photon Energie auf ein Elektron in einem Halbleitermaterial überträgt und so einen elektrischen Strom hervorruft. Dieses Prinzip (*innerer Photoeffekt*) nutzen auch Photovoltaikanlagen zur Umwandlung von Licht in elektrische Energie. Der *äußere Photoeffekt* wird im Abschnitt 4.2 beschrieben, der innere im Abschnitt 4.5.

zeigten, dass es Elektronen sind, die das Metall verlassen. Diesen photoelektrischen (lichtelektrischen) Effekt, kurz Photoeffekt genannt, untersuchte man in den folgenden Jahren genauer, um festzustellen, wie die Messdaten von der Frequenz und der Intensität des Lichts abhängen.

Diese Untersuchungen zeigten folgende Ergebnisse:

- Die Anzahl der beobachteten Elektronen wächst mit der Intensität des Lichts an, aber nur, wenn die Frequenz des Lichts einen bestimmten Wert überschreitet, der von dem verwendeten Metall abhängt. Ist die Frequenz kleiner als diese Grenzfrequenz, werden keine Elektronen beobachtet, selbst wenn man die Intensität des Lichts oder die Bestrahlungsdauer erhöht, so dass die gesamte eingestrahlte Energie sehr groß wird.
- Die kinetische Energie jedes austretenden Elektrons hängt nur von der Frequenz des Lichts ab, nicht von der Intensität oder der Bestrahlungsdauer. Sie ist proportional zur Differenz zwischen der eingestrahlten Frequenz und der für das Metall spezifischen Grenzfrequenz.

Die Erklärung für diese Beobachtungen lieferte Albert Einstein 1905, indem er die von Planck vorgeschlagene Quantisierung der Energie benutzte: Das Licht mit Frequenz f besteht aus Energiequanten der Größe $E = hf$ und jedes Energiequant wird vollständig auf ein Elektron übertragen. Um das Metall zu verlassen, muss das Elektron aber die „Austrittsarbeit“ W_A aufbringen, die für verschiedene Metalle unterschiedlich ist. Die kinetische Energie der austretenden Elektronen ist dann $hf - W_A$, aber natürlich nur, wenn hf größer als W_A ist. Ist das nicht der Fall, können die Elektronen das Metall nicht verlassen.

Im *Treffpunkt Quantenmechanik* findet das eigentliche Experiment im Vakuum statt, damit die austretenden Elektronen nicht mit Luftmolekülen zusammenstoßen können. Die Elektronen treten aus der Metalloberfläche (der Kathode) aus und fliegen danach in alle möglichen Richtungen. Durch eine Gegenspannung werden sie auf ihrem Weg zur Anode abgebremst, so dass mit wachsender Gegenspannung immer weniger Elektronen die Anode erreichen und als Strom dort registriert werden. Wenn die Gegenspannung so groß ist, dass auch die genau auf die Anode zufliegenden Elektronen ihre kinetische Energie verloren (und in potentielle Energie umgewandelt) haben, wird der Strom an der Anode Null, und aus dem Wert der Gegenspannung kann man dann die kinetische Energie der Elektronen berechnen.

Mit einer Quecksilber-Spektrallampe wird Licht erzeugt, das mit einem Prisma in verschiedene Anteile unterschiedlicher Frequenz aufgespalten wird. Damit hat man im Experiment die Möglichkeit, die Abhängigkeit des Photoeffekts von der Frequenz zu untersuchen. Die hier geschilderte Gegenspannungsmethode benutzte ab 1912 Robert Andrews Millikan, um Einsteins Theorie von 1905 zu bestätigen, die 1921 mit dem Nobelpreis für Physik belohnt wurde. Millikan wird uns im nächsten Abschnitt wieder begegnen.

4.3 Millikan-Versuch

In den beiden letzten Abschnitten ging es um die Quantisierung der Energie; jetzt geht es um die Quantisierung der Ladung: In der gesamten Natur findet man nur² Ladungen, die ein Vielfaches der Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}$ sind. Ein Elektron hat die Ladung $-e$, ein Proton hat die Ladung $+e$.

Da die Elementarladung so klein ist, benötigt man empfindliche Messmethoden. Harvey Fletcher, der unter Anleitung von Robert Andrews Millikan für seine Doktorarbeit experimentierte, konnte die schon von anderen Forschern verwendeten Methoden so weit verbessern, dass 1910 eine recht genaue Bestimmung von e möglich war, für die Millikan³ 1923 den Nobelpreis für Physik erhielt.

Der grundlegende Aufbau des Experiments im *Treffpunkt Quantenmechanik* ist der vor über 100 Jahren verwendeten Apparatur sehr ähnlich. Alles beginnt damit, dass mit einer Zerstäuberdüse kleine Öltröpfchen erzeugt werden. Viele dieser Tröpfchen sind geladen, als Folge von Reibungselektrizität. Die Ladungsmengen auf den Tröpfchen sind unterschiedlich, ebenso wie ihre Größen. Die Tröpfchen sind so klein, dass sie in der Luft nur langsam absinken, ähnlich wie eine Stahlkugel in Honig oder einer anderen zähen Flüssigkeit; sie bilden somit ein Aerosol. Die Sinkgeschwindigkeit der Tröpfchen ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft und der Luftreibungskraft, welche vom Radius des Tröpfchens, seiner Fallgeschwindigkeit und auch von der Temperatur der Luft abhängt.

Die Fallgeschwindigkeit eines einzelnen Tröpfchens wird durch Beobachtung mit einem Mikroskop ermittelt. Da sich durch die notwendige Beleuchtung die Lufttemperatur verändern kann, muss diese immer mitgemessen werden. Natürlich darf in der Messkammer keinerlei Luftströmung entstehen, die das Tröpfchen bewegt und so die Messung verfälscht. Eine der Ideen, die zum Erfolg des ursprünglichen Experiments führten, war die Verwendung von Öl anstelle anderer Flüssigkeiten, deren Tröpfchen viel zu schnell verdunsten, so dass die Tröpfchen sich von einem Moment zum nächsten verändern. Die Schwerkraft ist proportional zum Volumen des Tröpfchens und die Luftreibungskraft ist proportional zum Radius des Tröpfchens und zu seiner Fallgeschwindigkeit. Aus der Fallgeschwindigkeit kann man dann die Größe des Tröpfchens bestimmen, und damit seine Masse.

Im zweiten Schritt legt man ein elektrisches Feld zum Ausgleich der Schwerkraft an, so dass das Tröpfchen genau in der Schwebe stehenbleibt. Dann entfällt die Reibungskraft und aus dem Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft und der elektrischen Kraft kann man die Ladung des Tröpfchens bestimmen, denn seine Größe und damit seine Masse sowie die Stärke des elektrischen Felds sind bekannt. Wiederholung mit vielen Tröpfchen liefert viele Werte für die Ladung der Tröpfchen, die alle – im Rahmen der Messgenauigkeit – Vielfache von $-e$ sein sollten.

²Möglicherweise haben Sie schon einmal von den Quarks gehört, aus denen Protonen und Neutronen bestehen, und die keine ganzzahlige, sondern drittelzahlige Ladung besitzen. Wegen der Natur ihrer Wechselwirkungen können Quarks aber nie einzeln auftreten, sondern immer nur in Kombinationen, die dann wieder eine ganzzahlige Gesamtladung (in Einheiten von e) haben.

³Auf der entscheidenden Veröffentlichung in der Fachzeitschrift *Science* stand nur Millikan als Autor. Er und Fletcher hatten vertraglich ausgemacht, dass Fletcher einen anderen Teil seiner Untersuchungen als alleiniger Autor publizieren und damit zum Doktor promovieren durfte.

4.4 Spektroskopie

Spektrum (Plural: Spektren), Spektroskopie

Als **Spektrum** bezeichnet man die Gesamtheit der in einem Bereich zu beobachtenden Wellenlängen (oder Frequenzen) der elektromagnetischen Strahlung, zusammen mit ihren jeweiligen Intensitäten. Wenn in einem Bereich alle Wellenlängen auftreten können, bezeichnet man das Spektrum als **kontinuierlich**, z.B. bei der Wärmestrahlung eines heißen Objekts. Wenn nur ganz bestimmte Wellenlängen auftreten können, nennt man das Spektrum **diskret**. Das ist beispielsweise für reine chemische Elemente der Fall. Diskrete Spektren nennt man auch **Linienpektren**, benannt nach dem Bild von farbigen Linien auf dunklem Hintergrund, das sich in einem optischen Spektrometer zeigt. Durch Untersuchung solcher Linienpektren in der **Spektralanalyse** stellt man fest, welche chemischen Elemente die untersuchte Substanz enthält. Die Untersuchung von Spektren nennt man **Spektroskopie**.

Allgemeiner bezeichnet man auch die möglichen Werte der Energie eines Quantensystems als **Energiespektrum**.

Von Spektren und Spektroskopie ist in diesem Text schon öfter die Rede gewesen, beispielsweise in den Abschnitten 2.3 und 3.1. Der Versuch *Spektroskopie im Treffpunkt Quantenmechanik* zeigt, wie ein optisches Spektrum ausgemessen werden kann; es ergibt sich dabei ein Linienpektrum, das die Quantisierung der Energie demonstriert. Die verwendete Technik hat sich seit über zwei Jahrhunderten bewährt und wird heute noch verwendet, inzwischen natürlich ergänzt durch automatische Steuerung, Datenaufnahme und Auswertung per Computer.

Im Versuch wird das Licht einer Lampe analysiert, in der Atome von Quecksilber (Hg) und Cadmium (Cd) in angeregte Zustände versetzt werden. Kurze Zeit danach fallen sie wieder in den Grundzustand (den Zustand niedrigster Energie) zurück und senden dabei jeweils ein Photon mit bestimmter Energie aus. Diese Energie entspricht einer bestimmten Wellenlänge. Da es mehrere angeregte Zustände mit unterschiedlichen Energien gibt, enthält das von der Lampe emittierte Licht mehrere, aber nur ganz bestimmte Wellenlängen, anders als das von einem glühenden Stück Eisen emittierte Licht, das ganz beliebige Wellenlängen enthält. Dass nur wenige verschiedene Wellenlängen beobachtet werden, ist ein Hinweis darauf, dass die Atome in der Lampe nur ganz bestimmte verschiedene Energien haben können, dass ihre Energie also quantisiert ist. (Die Quantisierung der Energie wurde in Abschnitt 3.1 an einem einfachen Beispiel erläutert.)

Um die verschiedenen Wellenlängen des Lichts beobachten und ausmessen zu können, muss man sie zunächst voneinander trennen. Dazu gibt es zwei Standardtechniken. Man kann das Licht durch ein Prisma schicken, so wie im Versuch *Photoeffekt*, oder durch ein Gitter, so wie im vorliegenden Versuch. Prisma und Gitter nutzen unterschiedliche physikalische Effekte aus. Im Glas des Prismas ist die Geschwindigkeit des Lichts von dessen Wellenlänge abhängig. Diese *Brechung* des Lichts sorgt dafür, dass das Licht je nach Wellenlänge das Prisma unter einem unterschiedlichen Winkel verlässt. Im Gegensatz dazu tritt beim Gitter *Beugung* auf, die auf der Interferenz beruht, welche im Abschnitt 2.3 behandelt wurde.

Hier wird noch einmal die Beugung am Gitter besprochen; mehr Details finden sich im Abschnitt 2.3, ab der Abbildung 2.10. Ein Gitter ist eine Anordnung von sehr vielen parallelen Spalten in einem undurchsichtigen Schirm. Man lässt die Lichtwellen senkrecht auf den Schirm treffen und beobachtet das Licht nach Durchgang durch den Schirm unter einem gewissen Winkel zur Einfallrichtung. Dann haben die Wellen, die von zwei benachbarten Spalten ausgehen, unterschiedliche Wege zurückgelegt, so wie in Abbildung 2.11 skizziert; man spricht von einem *Gangunterschied*. Wenn der Gangunterschied genau eine Wellenlänge (oder zwei Wellenlängen, oder drei...) beträgt, verstärken sich die beiden Wellen. Die vielen Spalte eines Gitters sind in gleichen Abständen angeordnet, so dass sich im „richtigen“ Winkel die Wellen von allen Spalten verstärken. Für andere Winkel heben sich die Wellen von den vielen Spalten gegenseitig auf. Da der „richtige“ Winkel aber für jede Wellenlänge einen anderen Wert hat, werden die verschiedenen Wellenlängen durch das Gitter voneinander getrennt. Die Beziehung zwischen Winkel, Wellenlänge und Spaltabstand ist durch einfache Geometrie gegeben, so dass man aus dem Winkel die Wellenlänge berechnen kann. (Wenn man dagegen ein Prisma verwendet, muss man die genaue Form des Prismas und die Eigenschaften der verwendeten Glassorte kennen.)

Im Experiment wird das zu untersuchende Licht zunächst durch einen Spalt (den sogenannten Eintrittsspalt) zu einem schmalen Bündel geformt, dann fällt es auf das Gitter. Hinter dem Gitter befindet sich ein Fernrohr, das drehbar gelagert ist, so dass man es um das Gitter schwenken kann und so das Licht sieht, das unter verschiedenen Winkeln das Gitter durchlaufen hat. Das Fernrohr ist auf einem Ring mit einer Skala montiert, auf der man den Winkel ablesen kann. Bevor man das aber tun kann, muss die Apparatur genau justiert werden: Das Fernglas muss so eingestellt werden, dass man den Eintrittsspalt (ohne das Gitter) scharf sieht und das Gitter muss genau so ausgerichtet werden, dass das Licht wirklich senkrecht einfällt. Die Breite des Eintrittsspalts ist verstellbar. Ist der Spalt breit, hat man viel Licht und kann ihn gut sehen, aber die Winkelmessung wird ungenauer als mit einem schmalen Spalt. Da gilt es einen guten Kompromiss zu finden.

Es gibt heute Verfahren, mit denen man optische Gitter sehr preisgünstig herstellen kann (anders als Prismen); im Internet ist ein Gitter mit 1000 Spalten pro mm so billig zu haben, dass die Versandkosten höher sind als der Preis des Gitters. Wer handwerklich begabt ist und die Bauanleitung im Internet findet, kann dann mit einem Gehäuse aus Pappe die Kamera des Smartphones als Spektrometer nutzen und das Spektrum auf dem Bildschirm bewundern (Handyspektrometer, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik). Das Produkt ist natürlich kein quantitativ arbeitendes Präzisionsgerät, aber die Spektren verschiedenartiger Lichtquellen kann es schon gut unterscheiden.

4.5 Detektion einzelner Photonen

Dieser Versuch im *Treffpunkt Quantenmechanik* demonstriert die Funktionsweise eines einfachen Detektors für einzelne Photonen. Der Detektor beruht selbst auf quantenmechanischen Effekten, nämlich einerseits auf der Quantisierung der Energie und andererseits auf dem Photoeffekt.

Sowohl der Detektor als auch die Lichtquelle für einzelne Photonen sind Leuchtdioden (LEDs). Eine Diode ist ein Halbleiterbauelement, das Strom nur in einer Richtung durchlässt. Das liegt daran, dass sie aus zwei verschiedenen Materialien besteht.

Die möglichen Energien für die Elektronen sind quantisiert und unterscheiden sich zwischen den beiden Materialien. Es gibt Energiebereiche („Bänder“), in denen sehr viele mögliche Energien liegen und Bereiche, die energetisch „verboten“ sind, die Bandlücken. Wenn an die Diode eine Spannung in Durchlassrichtung angelegt wird, fließen Elektronen und damit entsteht ein Strom. Bei einer Leuchtdiode gehen die Elektronen dabei von einem höheren Energieniveau in dem einen Material in ein niedrigeres in dem anderen Material über und jedes Elektron gibt die Energiedifferenz in Form eines Photons ab.

Eine Spannung in Sperrrichtung bewirkt dagegen keinen Strom, weil die Elektronen dann aus dem Übergangsbereich zwischen den beiden Materialien verdrängt werden, und wo keine beweglichen Ladungen sind, kann auch kein Strom fließen. Das gilt aber nur bis zur sogenannten Durchbruchspannung. Eine Spannung verschiebt die Energieniveaus der beiden Materialien gegeneinander. (Denken Sie daran, dass Spannung nichts anderes ist als Energie pro Ladung.) Bei der Durchbruchspannung liegen dann die Energieniveaus der beiden Materialien so zueinander, dass ein Strom in Sperrrichtung fließen kann.

Ein einzelnes Photon kann im Übergangsbereich der Diode ein Elektron aus einem gebundenen Zustand in einen Zustand höherer Energie befördern, so dass es sich im Material frei bewegen kann. Da das Elektron das Material nicht verlässt, spricht man hier vom *inneren Photoeffekt*, im Gegensatz zum *äußeren Photoeffekt* aus Abschnitt 4.2. Wenn eine hohe Spannung in Sperrrichtung anliegt, beschleunigt das entsprechende elektrische Feld das Elektron so stark, dass es weitere Elektronen „befreien“ kann, die dann wiederum beschleunigt werden, und so weiter. Das Ergebnis ist ein lawinenartig anwachsender Strom, der anzeigt, dass ein Photon registriert wurde. Durch geeignete Maßnahmen lässt sich diese Lawine schnell wieder abbremsen, so dass ein einzelnes Photon nur zu einem kurzen Strompuls führt. Danach ist die Leuchtdiode bereit, das nächste Photon zu registrieren.

Der Versuch wird in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt ist der Detektor dem Tageslicht bzw. der Raumbelichtung ausgesetzt, so dass ständig sehr viele Photonen einfallen. In dieser Anordnung lässt sich die Durchbruchspannung feststellen. Im zweiten Teil wird dann der Detektor von der äußeren Beleuchtung abgeschirmt, so dass nur das Licht einer weiteren LED einfallen kann. Die Intensität des von dieser LED abgegebenen Lichts kann über die angelegte Spannung gesteuert und berechnet werden. In einer Messreihe mit verschiedenen Betriebsspannungen kann dann ermittelt werden, wie die Anzahl der pro Sekunde registrierten Photonen von der Lichtintensität abhängt.

4.6 Compton-Effekt

Der Photoeffekt (vgl. Abschnitt 4.2) zeigt, dass Licht seine Energie nur in ganz bestimmten „Portionen“ an Elektronen abgibt. Einstein erklärte den Effekt durch die Annahme, dass das Licht aus Photonen besteht, die sich bei der Wechselwirkung mit Elektronen wie Teilchen verhalten. Da ein bewegtes Teilchen nicht nur (kinetische) Energie, sondern auch Impuls besitzt, sollten Photonen auch Impuls übertragen können. Der Beleg dafür ist der Compton-Effekt, wie bereits im Abschnitt 2.4 kurz erwähnt. Hier soll kurz dargestellt werden, worin der Effekt besteht und warum er im *Treffpunkt Quantenmechanik* leider *nicht* gezeigt werden kann.

Die Entdeckung der Röntgenstrahlung (1895) war eine wissenschaftliche Sensation und sehr viele Physiker begannen sich mit diesem neuen Phänomen zu befassen. Nach und nach häuften sich die Hinweise, dass Röntgenstrahlung ein Wellenphänomen ist, ähnlich wie Licht, nur mit sehr viel kürzerer Wellenlänge. Viele Materialien, z.B. Körpergewebe, werden von Röntgenstrahlen durchdrungen. Andere Materialien, z.B. Knochen oder Blei, absorbieren sie mehr oder weniger stark. Daneben beobachtete man aber auch *Streuung* der Strahlen, also eine Richtungsänderung durch die Wechselwirkung mit dem Material. Das ist weiter nicht ungewöhnlich, denn auch Licht wird gestreut, z.B. das Sonnenlicht an der Atmosphäre, und weil das kurzwellige Licht stärker gestreut wird, erscheint der Himmel tagsüber blau. Allerdings gab es bei der Streuung von Röntgenstrahlen Hinweise darauf, dass die gestreute Strahlung eine größere Wellenlänge hatte als die einfallende. Das war bei sichtbarem Licht nie beobachtet worden und daher ungewöhnlich.

Die Situation war zunächst sehr unklar, da sowohl die Quellen für Röntgenstrahlen als auch die Analysegeräte nicht präzise genug funktionierten. Erst Arthur H. Compton gelangen 1922 Experimente mit klarem Ergebnis. Nachdem er es nicht geschafft hatte, das Phänomen im Rahmen der klassischen Physik zu erklären, versuchte er es mit Einsteins Hypothese der Lichtquanten oder Photonen und konnte damit die Experimente als Stoßvorgänge zwischen je einem Elektron und einem Photon erklären. Dafür erhielt er 1927 den Nobelpreis.

In seinem Experiment ließ Compton Röntgenstrahlen mit einer bestimmten Wellenlänge auf Graphit (Kohlenstoff) fallen und maß den Winkel und die Wellenlänge der abgelenkten Strahlen. Die Elektronen des Kohlenstoffs sind nur relativ schwach an die Atome gebunden, und die Energie der einfallenden Röntgen-Photonen ist sehr groß. Dadurch werden die Elektronen „müheles“ aus dem Material gelöst und man hat es effektiv mit einem Stoß zwischen einem quasifreien Elektron und dem Röntgen-Photon zu tun.

Kinetische und potentielle Energie, klassisch

Kinetische Energie ist die Energie der Bewegung. Wenn ein Teilchen der Masse m sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat es die Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Wenn das Teilchen seine Energie beispielsweise an eine Feder abgibt, die durch den Aufprall gespannt wird, dann ist die Energie als potentielle Energie E_{pot} in der Feder gespeichert. Die Gesamtenergie, also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, ist konstant. Dieser Satz von der Erhaltung der Energie (auch kurz: Energiesatz) ist eines der wichtigsten Prinzipien der Physik.

Häufig hängt E_{pot} von einer Ortskoordinate x ab, in unserem Beispiel etwa von dem Ort, an dem das Teilchen von der Feder gestoppt wird. Je schneller es am Anfang war, desto weiter wird die Feder zusammengedrückt und desto größer ist die potentielle Energie. In der Physik bezeichnet man eine solche vom Ort x abhängige potentielle Energie meist kurz mit $V(x)$ und spricht auch abkürzend vom Potential. (Eine etwas missverständliche Bezeichnung,

da man in der Elektrizitätslehre die potentielle Energie *pro Ladung* als elektrisches Potential bezeichnet.)

Die kinetische Energie wird häufig durch den Impuls $p = mv$ ausgedrückt; dann hat man die Beziehung

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}.$$

Diese Beziehung gilt allerdings nur, wenn das Teilchen sich mit Geschwindigkeiten bewegt, die sehr klein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit c sind. Ist das nicht der Fall, muss man die Relativitätstheorie bemühen und erhält

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2.$$

In diesem Buch wird die Relativitätstheorie aber nur an einer einzigen Stelle wichtig, und zwar beim Compton-Effekt.

Um diesen Stoßprozess zu analysieren, muss man die Gesetze von der Erhaltung der Energie und des Impulses betrachten: Die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls müssen vor und nach dem Stoß gleich sein. Was das Photon an Energie und Impuls abgibt, muss das Elektron aufnehmen. Das gilt für diesen Stoß genauso wie für den Stoß zwischen zwei Billardkugeln. Der Unterschied zu den Billardkugeln ist hier, dass das Photon sich nur mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann, während das Elektron sich nur mit weniger als der Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Die Energie E eines Photons mit Impuls p ist $E = pc$ (c = Lichtgeschwindigkeit). Die kinetische Energie eines Teilchens mit Masse m und Impuls p ist aber immer *kleiner* als die Energie eines Photons mit Impuls p . Damit kann das Elektron nicht den gesamten Impuls und gleichzeitig die gesamte Energie des Photons aufnehmen, das Photon kann also nicht vollständig verschwinden⁴, sondern muss den Ort des Zusammenstoßes in veränderter Form wieder verlassen.

Den maximalen Impuls kann das Photon abgeben, wenn es nach dem Stoß genau in die Richtung zurückfliegt, aus der es kam. Diese Situation kann man relativ leicht analysieren, da das Elektron sich dann genau in der ursprünglichen Flugrichtung des Photons bewegt. Bei diesem Vorgang gibt das Photon einen maximalen Teil seiner Energie ab, so dass seine Frequenz (maximal) abnimmt und damit seine Wellenlänge (maximal) zunimmt, und zwar genau um $2\lambda_C$, wobei $\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,42 \cdot 10^{-12}\text{m}$ die sogenannte Compton-Wellenlänge ist. h ist, wie immer, die Planck-Konstante, m die Elektronenmasse und c die Lichtgeschwindigkeit. Wenn das Photon nach dem Stoß in eine andere Richtung als „rückwärts“ fliegt, gibt es auch eine Komponente des Impulses senkrecht zur ursprünglichen Flugrichtung, welche aber geringer ist als der Photonenimpuls bei der Rückwärtsstreuung. Diese geringere Komponente wird durch eine entsprechende Impulskomponente des Elektrons ausgeglichen, damit der Satz von der Erhaltung des Impulses erfüllt bleibt. Insgesamt nimmt dann die Frequenz des gestreuten Photons weniger stark ab bzw. die Wellenlänge weniger stark zu; die genauen Rechnungen ersparen wir uns aber.

⁴Das ist anders als beim Photoeffekt; dort übernimmt ein einzelnes Elektron aus dem mit Licht bestrahlten Metall die gesamte Energie des Photons, und die Impuls-Bilanz wird durch die vielen Atome des Metallstücks ausgeglichen.

Warum beobachtet man den Compton-Effekt nun bei Röntgenstrahlung, aber nicht bei gewöhnlichem Licht? Dazu muss man sich die Wellenlängenverhältnisse klarmachen: Sichtbares Licht hat Wellenlängen von (grob) 400 nm bis 800 nm, also $4 \cdot 10^{-7}$ m bis $8 \cdot 10^{-7}$ m ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Die Comptonwellenlänge ist aber über hunderttausendmal kleiner! Das heißt, der Effekt ist zwar vorhanden, aber so winzig, dass er praktisch nicht zu beobachten ist. Compton benutzte bei seinem Experiment Röntgenstrahlen mit einer Wellenlänge von $70,8 \cdot 10^{-12}$ m, so dass die Comptonwellenlänge λ_C etwa 3,4% davon ausmachte und damit die Wellenlängenänderung (bis zu $2\lambda_C$) gut messbar war.

Das erklärt auch, warum der Compton-Effekt nicht als Versuch im *Treffpunkt Quantenmechanik* aufgebaut ist: Um ihn zu beobachten, benötigt man Röntgenstrahlen, deren Wellenlänge mit der Compton-Wellenlänge vergleichbar ist, und die sollten nur von besonders geschultem Personal unter strengen Sicherheitsvorkehrungen benutzt werden. Wir möchten Sie schließlich nur belehren, aber nicht bestrahlen.

Kapitel 5

Superposition erklärt (fast) alles.

In diesem Abschnitt sollen die unklaren und verblüffenden Aspekte der Quantenphysik noch einmal aufgegriffen werden, ohne auf einzelne Experimente des *Treffpunkts Quantenmechanik* im Detail einzugehen. Wer also „nur“ Information zu den Experimenten sucht, kann diesen Abschnitt überspringen. Wer aber für sich selbst noch etwas mehr Licht in die quantenmechanischen „Mysterien“ und die Zusammenhänge zwischen ihnen bringen will, sollte weiterlesen. Um diese Zusammenhänge wirklich zu verstehen, benötigt man allerdings etwas Mathematik, was aber durchaus machbar ist und gleichzeitig auch ganz spannend, da die Mathematik überraschende Einsichten zu bieten hat.

Im Abschnitt 3.2 haben wir schon einmal Richard Feynmans Bemerkung zitiert, dass das Superpositionsprinzip (eine Überlagerung von erlaubten Zuständen ist auch ein erlaubter Zustand) „das einzige Mysterium der Quantenmechanik“ sei. Wenn beispielsweise „fliegt nach rechts“ und „fliegt nach links“ zwei mögliche Zustände eines Teilchens sind, dann ist auch eine Überlagerung dieser beiden Zustände möglich. Im Überlagerungszustand hat das Teilchen keine bestimmte Flugrichtung mehr. Wenn man die Richtung misst, ist das Ergebnis völlig zufällig entweder „rechts“ oder „links“, aber *nach* der Messung ist die Flugrichtung plötzlich wieder eindeutig festgelegt. Das war ein sehr einfaches Beispiel; das Doppelspaltexperiment im Abschnitt 2.5 bietet noch mehr Stoff zum Nachdenken, und je mehr man nachdenkt, desto mehr findet man, dass Feynman recht hat. Wir wollen in diesem Kapitel etwas genauer analysieren, wie sich aus dem Superpositionsprinzip der Zufallscharakter und viele weitere Eigenschaften der Quantenmechanik ergeben. Dazu werden wir etwas mathematisches Werkzeug benötigen und hierfür die wichtigsten Eigenschaften von **Vektoren** und **komplexen Zahlen** kennenlernen.

Am einfachsten stellt man sich Vektoren als „gerichtete Strecken“ vor, mit einem Anfang, einem Ende und einer bestimmten Richtung im Raum. Man kann sie addieren, indem man den Anfang des einen Vektors an das Ende des anderen anfügt. Das Ergebnis ist wieder ein Vektor. Man kann auch einen Teil des einen Vektors zu einem Vielfachen des anderen addieren; dann hat man eine Überlagerung oder *Superposition* gebildet. Das werden wir uns anhand von zweidimensionalen Vektoren klarmachen. Vektoren

erfüllen also das Superpositionsprinzip, genauso wie wir das schon früher für Wellenfunktionen gesehen haben, in den Abschnitten 2.4 und 2.5. Es gibt also Ähnlichkeiten zwischen Vektoren und Wellenfunktionen; tatsächlich kann man Wellenfunktionen als Beschreibung quantenmechanischer Zustände vollständig durch Vektoren ersetzen, und das hat viele Vorteile, weshalb wir hier die allereinfachsten Vektoren näher kennenlernen wollen.

Vektoren helfen auch dabei zu klären, welche Arten von Zustandsänderungen mit dem Superpositionsprinzip vereinbar sind: Es muss egal sein, ob zwei Zustände erst in gleicher Weise verändert und dann überlagert werden, oder ob erst überlagert und dann die Superposition verändert wird. Die nach dem Superpositionsprinzip zulässigen Änderungen von Vektoren werden durch **Matrizen** beschrieben, die wir ebenfalls am einfachsten Beispiel kennenlernen werden. Wir werden sehen, dass es bei mehreren aufeinander folgenden Änderungen (Matrizen) *auf die Reihenfolge ankommt*. Das entspricht der Tatsache, dass Messungen verschiedener Größen sich gegenseitig stören können, so dass der Endzustand nach mehreren Messungen von der Reihenfolge abhängt.

Um zu sehen, wie das genau vor sich geht, benötigt man die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenvektor* (bzw. Eigenzustand), die zwar schon im Kapitel 3 vorkamen, die wir hier aber ganz konkret am einfachsten Beispiel kennenlernen. Am Ende ergibt sich dann die „mysteriöse“ Unschärferelation, über die wir dann nicht nur geredet haben, sondern die wir insofern wirklich verstanden haben, als wir sie nachrechnen können und gesehen haben, wie sie sich aus dem Superpositionsprinzip ergibt. Diese einfachen Überlegungen mit Matrizen und Vektoren gehören zum Grundgerüst der quantenmechanischen Theorie; mehr haben auch die dicken akademischen Lehrbücher der Quantenmechanik nicht zu bieten, außer mathematischen Feinheiten und vielen, vielen Anwendungen.

Der zweite neue mathematische Begriff in diesem Kapitel ist die *komplexe Zahl*. Für die mathematische Beschreibung der Quantenmechanik sind die komplexen Zahlen nicht nur praktisch, sondern unvermeidlich. Dabei stellt das Arbeiten mit ihnen keine besondere Herausforderung dar, wenn man sich einmal an Vektoren gewöhnt hat.

So wie ein zweidimensionaler Vektor durch seine Länge und seine Richtung festgelegt werden kann, kann eine komplexe Zahl durch ihren Betrag und ihre *Phase* (das ist ein Winkel, also auch eine Richtung) bestimmt werden. In einer Superposition von zwei Zuständen wird der Anteil jedes Zustands durch eine komplexe Zahl beschrieben. Dabei kommt es sehr auf die Differenz der Phasen zwischen den Anteilen der beiden Zustände an, wie man an dem einfachen Beispiel am Anfang des Abschnitts 2.3 sieht. Dort wurde die Interferenz zweier Wellen mit gleicher Wellenlänge (und gleicher Amplitude) dargestellt. Dabei war entscheidend, wie die beiden Wellen relativ zueinander liegen, also wie weit die Wellenberge der einen Welle zu den Wellenbergen der anderen verschoben sind. Das wird genau durch die Phasendifferenz ausgedrückt: Phasendifferenz Null bedeutet konstruktive Interferenz, Phasendifferenz 180° bedeutet destruktive Interferenz.

Die Wellenfunktionen für ein Teilchen in physikalisch interessanten Situationen sehen komplizierter aus als die einfachen Wellen am Anfang des Abschnitts 2.3. Bei einer Überlagerung von zwei solchen Wellenfunktionen kann die Phasendifferenz entscheiden, ob das Teilchen bevorzugt in einem bestimmten Raumbereich oder in einem anderen zu finden ist. Wenn sich diese Phasendifferenz mit der Zeit ändert, wird das Teilchen seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit verlagern, es wird sich also *bewegen*. So

erklärt die Quantenmechanik die Bewegung von Teilchen im Raum, die wir im Abschnitt 3.1 schon einmal anhand von laufenden Wellen diskutiert hatten. Wie die beiden Beschreibungen, mit laufenden Wellen und mit zeitabhängigen Phasendifferenzen, miteinander zusammenhängen, werden wir dann sehen.

5.1 Vektoren und das Superpositionsprinzip

Bisher haben wir den Zustand eines quantenmechanischen Teilchens durch eine Wellenfunktion beschrieben, die auf einfache Art Aussagen über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Raum lieferte. Auch die quantenmechanischen Interferenzphänomene waren durch die Ähnlichkeit mit Wasserwellen gut zu veranschaulichen. Andere physikalische Größen sind aus der Wellenfunktion nur mit etwas größerem mathematischem Aufwand zu entnehmen, und manche Fragen kann die Wellenfunktion überhaupt nicht beantworten.

Wellenfunktion Achtung: Enthält höhere Mathematik.

Die **Wellenfunktion** eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf der x -Achse bewegt, hängt ab vom Ort x und der Zeit t ; meist wird sie bezeichnet mit $\Psi(x, t)$ (lies: „Psi von x und t “).

$\Psi(x, t)$ ist eine *komplexe* Funktion, d.h. sie besteht aus zwei Teilen, $\text{Re}\Psi(x, t)$ und $\text{Im}\Psi(x, t)$ (lies: „Realteil von Psi und Imaginärteil von Psi“). Diese beiden Teile spielen eine ähnliche Rolle wie die Koordinaten x und y eines Punktes in einer Ebene, wo beispielsweise der Abstand r des Punktes (x, y) vom Nullpunkt mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden kann:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Aus der Wellenfunktion ergibt sich auf ähnliche Weise die wichtige Größe

$$|\Psi(x, t)|^2 = (\text{Re}\Psi(x, t))^2 + (\text{Im}\Psi(x, t))^2$$

(lies: „Psi-Betragsquadrat“), die angibt, wie wahrscheinlich es ist, das Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden. (Präzise ausgedrückt, ist $|\Psi(x, t)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.)

Es gibt aber eine alternative Beschreibung der Quantenmechanik, die für andere Aspekte besser geeignet ist, etwa um die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen möglichen Messergebnisse zu bestimmen, wenn andere Größen als der Ort des Teilchens gemessen werden. Dieser Formalismus benutzt statt der Wellenfunktionen **Vektoren** in einem abstrakten Raum. Das ist viel einfacher als es klingt, wie wir gleich sehen werden. Die beiden Beschreibungen wurden parallel in der Frühzeit der Quantenmechanik entwickelt, die „Wellenmechanik“ von Schrödinger und die „Matrizenmechanik“¹ von Heisenberg. Es stellte sich aber sehr schnell heraus, dass die beiden Theorien vollkommen gleichwertig sind. Trotzdem hat jede für sich ihre Vorteile für bestimmte Zwecke.

¹Was Matrizen sind und was sie mit Vektoren zu tun haben, wird gleich noch erklärt.

Gewöhnliche Vektoren...

„Gewöhnliche“ Vektoren sind mathematische Hilfsmittel um die Geometrie in zwei Dimensionen (etwa auf der Erdoberfläche) oder in drei Dimensionen zu beschreiben. Man kann z.B. einen Weg beschreiben, indem man sagt: „Gehe 1000m nach Osten und 1000m nach Norden.“ Den Zielpunkt dieser Wanderung erreicht man auch nach der Anweisung: „Gehe 1414m nach Nordosten.“ Diese beiden Anweisungen sind schon Beispiele für die zwei üblichen Arten, einen Vektor in zwei Dimensionen zu beschreiben: Man kann entweder die **Komponenten** des Vektors in Bezug auf die Achsen eines Koordinatensystems (z.B. die Himmelsrichtungen) angeben, oder man gibt den **Betrag** (Länge) und die **Richtung** des Vektors an. Man kann Vektoren auch addieren. In unserem Beispiel würde das durch eine zusätzliche Anweisung geschehen: „Gehe vom Zielpunkt aus noch einmal 500m nach Norden.“ Dann ist man insgesamt 1500m nach Norden und 1000m nach Osten gegangen, indem man den zweiten Vektor an das Ende des ersten angefügt hat. In der Komponentenschreibweise ergeben sich die Komponenten des Summenvektors einfach, indem man die Komponenten der einzelnen Summanden addiert.

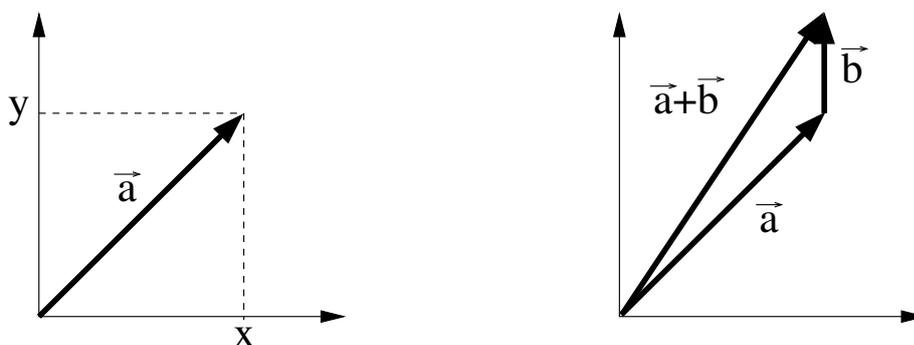


Abbildung 5.1: Vektoren in zwei Dimensionen kann man als Pfeile darstellen und deshalb verwendet man auch einen Buchstaben mit Pfeil als mathematisches Symbol.

Links: Ein zweidimensionaler Vektor \vec{a} kann durch seine Komponenten x und y bezüglich zweier Achsen angegeben werden.

Rechts: Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} kann man grafisch addieren, indem man die Pfeile aneinander setzt. Rechnerisch kann man die einzelnen Komponenten der beiden Vektoren addieren. (Grafik: Stolze)

Es gibt viele verschiedene Schreibweisen für Vektoren; wir entscheiden uns hier für die Pfeil-Schreibweise: Wenn über einem Symbol ein kleiner Pfeil auftaucht, ist ein Vektor (in zwei oder drei Dimensionen, je nachdem) gemeint. In der Abbildung 5.1 ist das so gemacht. Um mit Vektoren zu *rechnen*, ist die Schreibweise mit Komponenten am besten geeignet. Man schreibt die Komponenten übereinander und schließt sie in Klammern ein; üblicherweise kommt die x -Komponente („Osten“) zuerst, und darunter die y -Komponente („Norden“). Für unser Beispiel ergibt sich dann (wenn wir uns auf Meter als Einheit einigen):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \end{pmatrix}.$$

Die Schreibweise mit Komponenten macht sofort zwei Dinge klar: Die Reihenfolge der Addition ist unwichtig.² Man kann Vektoren auch mit Zahlen multiplizieren, was

²Wenn man die Vektoren als Wander-Anweisungen versteht, kann die falsche Reihenfolge in einen Sumpf führen, aber mit solchen praktischen Fragen wollen wir uns hier nicht beschäftigen.

anschaulich zu einem verlängerten bzw. verkürzten Pfeil führt, je nachdem ob die Zahl größer oder kleiner als 1 ist. So lassen sich auch **Linearkombinationen** („gewichtete Summen“) von Vektoren bilden:

$$1,3\vec{a} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 1300 \end{pmatrix}, \quad -0,4\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \end{pmatrix}, \quad 1,3\vec{a} - 0,4\vec{b} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 1100 \end{pmatrix}.$$

Eine Linearkombination zweier Vektoren ist ein Vektor in demselben Raum³, hier also in der zweidimensionalen Ebene. Das ist genau das **Superpositionsprinzip**: Eine Überlagerung (Linearkombination) von zwei Vektoren ist auch ein Vektor, genauso wie eine Überlagerung von zwei Wellenfunktionen wieder eine Wellenfunktion ist. Das Superpositionsprinzip (zusammen mit ein paar weiteren Eigenschaften) ist für Mathematiker *der entscheidende Grund* dafür, ein Objekt als Vektor zu bezeichnen. Die Schreibweise mit Komponenten bezeichnet übrigens im Grunde auch schon eine Überlagerung, nämlich eine Überlagerung von zwei Vektoren, die genau in die beiden Achsenrichtungen zeigen.

Wir haben hier die Eigenschaften von Vektoren in zwei Dimensionen veranschaulicht. In drei Dimensionen geht aber alles ganz analog, ist nur mit etwas mehr Schreibarbeit verbunden, und die Zeichnungen werden etwas schwieriger. Wir werden uns aber gleich sowieso in abstraktere Räume mit *viel* mehr Dimensionen begeben. Wie immer gilt aber: *Keine Panik!*

...und abstrakte Vektoren

Von zweidimensionalen gewöhnlichen Vektoren kann man unmittelbar zu abstrakten Vektoren übergehen. Ein zweidimensionaler gewöhnlicher Vektor ist eine Überlagerung von zwei Vektoren, die genau in die beiden Koordinatenrichtungen x und y bzw. Osten und Norden zeigen. Ein Vektor in einem zweidimensionalen abstrakten Raum der Quantenmechanik ist eine Überlagerung von zwei „echt verschiedenen“ quantenmechanischen Zuständen, zum Beispiel dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand eines Atoms, und eine beliebige Überlagerung dieser beiden Zustände ist dann ein zweidimensionaler abstrakter Vektor, der rechnerisch genauso zu behandeln ist wie ein zweidimensionaler gewöhnlicher Vektor. Da Atome und andere quantenmechanische Systeme oft sehr viel mehr als nur zwei verschiedene Zustände haben, müssen Physiker:innen sich an Vektoren mit viel mehr als zwei Komponenten gewöhnen. Alle wichtigen Eigenschaften von Vektoren lassen sich aber sehr gut in zwei Dimensionen erklären.

Das kleine Vektor-Zweimalzwei

Wir schreiben einen Vektor mit den Komponenten x und y etwas um:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Das ist die Zerlegung in zwei Vektoren entlang der Koordinatenachsen, die wir oben schon einmal erwähnt hatten. Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben beide

³Die Gesamtheit aller Vektoren nennt man einen Raum oder, präziser, einen Vektorraum. Die Dimension des Raumes ist die Anzahl der Komponenten der Vektoren.

die Länge Eins und stehen senkrecht aufeinander. Einen solchen Satz von **Einheitsvektoren** bezeichnet man als **Basisvektoren**. Eine solche Basis kann man in jedem Vektorraum finden, gleich welche Dimension er hat. Der Grundzustand und die angeregten Zustände sind dann die Basisvektoren im abstrakten Raum der Zustände eines Atoms⁴.

Im Abschnitt 2.4 haben wir den Zusammenhang zwischen der Wellenfunktion und der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens kennengelernt. Dabei ist klar geworden, dass physikalisch sinnvolle Wellenfunktionen für ein Teilchen *normiert* sein müssen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen *irgendwo* im Raum zu finden, sollte Eins sein. Diese Eigenschaft überträgt sich, wenn wir die Zustände eines quantenmechanischen Systems nicht mehr als Wellenfunktionen, sondern als Vektoren ansehen. Die Rolle der Normierung übernimmt dabei die *Länge* des Vektors. Die Basisvektoren haben bereits die Länge Eins, und von allen anderen (Zustands-) Vektoren wollen wir das jetzt auch fordern. Die Länge eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in zwei Dimensionen ist $\sqrt{x^2 + y^2}$ und wir fordern, dass für physikalisch sinnvolle Zustände gilt:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Eine naheliegende (und, wie sich herausstellt, richtige) Idee ist es, die Eins wieder als Summe von Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Möglichkeiten zu deuten, und da unser System nur zwei unterschiedliche Basis-Zustände zur Verfügung hat, ist x^2 die Wahrscheinlichkeit, das System bei einer Messung im Basiszustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu finden und y^2 ist die Wahrscheinlichkeit, es im anderen Basiszustand $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu finden.⁵

Physikalisch sinnvolle Zustandsvektoren haben also die Länge Eins. Nach dem Superpositionsprinzip kann man zwei (oder mehr) solche zulässigen Zustandsvektoren überlagern, d.h. eine gewichtete Summe bilden. Eine solche Überlagerung stellt wieder einen zulässigen Zustand dar, wenn die gewichtete Summe die Länge Eins hat.

Nun können sich quantenmechanische Zustände, also abstrakte Vektoren, im Laufe der Zeit verändern, etwa durch Einwirkungen von äußeren Kräften oder durch Wechselwirkungen zwischen Teilchen. Diese Veränderungen können nicht vollkommen beliebig sein, denn die Länge eines Zustandsvektors muss immer gleich Eins bleiben. Im einfachsten Fall, in zwei Dimensionen, sind damit als Änderungen ausschließlich Drehungen um den Nullpunkt möglich; nur dann ist sichergestellt, dass die Komponenten x und y des Vektors immer die Bedingung $x^2 + y^2 = 1$ (die Gleichung eines Kreises mit Radius Eins um den Nullpunkt) erfüllen. Weil nach dem Superpositionsprinzip Überlagerungen (der Länge Eins) zulässiger Zustände auch wieder zulässige Zustände sind, muss es egal sein, ob ich zwei Vektoren erst überlagere und dann eine Änderung an der Überlagerung durchführe, oder ob ich diese Änderung an den beiden einzelnen Vektoren durchführe und sie dann überlagere.⁶ In zwei Dimensionen heißt das, es macht keinen Unterschied, ob ich zwei Vektoren um einen bestimmten Winkel drehe

⁴Welche Dimension dieser Raum hat und was „senkrecht aufeinander“ in diesem Raum bedeutet, besprechen wir nicht genauer, weil es hier nicht nötig ist. Es ist aber nicht wirklich schwierig.

⁵Für Besserwisser: x und y können auch komplexe Zahlen sein; dann muss man $|x|^2$ und $|y|^2$ benutzen. Wir werden uns später noch mit komplexen Zahlen beschäftigen; im Moment machen wir uns das Leben aber möglichst einfach.

⁶Das gilt ausdrücklich *nicht* für die Änderungen, die ein Zustand durch eine *Messung* erfährt, da jede Messung den Zustand auf *zufällige* Weise verändert, wie in Abschnitt 3.2 erklärt.

und danach überlagere oder erst die Überlagerung bilde und dann drehe (natürlich um den gleichen Winkel).

Diese Idee kann man in die Sprache der Mathematik übersetzen: Wenn sich aus einem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ im Laufe der Zeit ein anderer Vektor $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ entwickelt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},$$

dann lässt sich das Superpositionsprinzip nur erfüllen, wenn die „neuen“ Komponenten r und s **linear** von den „alten“ Komponenten x und y abhängen, und das heißt

$$r = ax + by \quad \text{und} \quad s = cx + dy,$$

mit bestimmten Zahlen a, b, c und d . Für diese Art von linearen Umformungen von Vektoren haben Mathematiker eine kompakte Schreibweise erfunden:

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das Zahlenschema mit den zwei Zeilen $(a \ b)$ und $(c \ d)$ nennt man **Matrix** (Plural: Matrizen). Da diese Matrix zwei Zeilen und zwei Spalten $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ hat, nennt man sie „ 2×2 -Matrix“. Das lässt ahnen, dass es Matrizen auch noch in anderen Größen gibt; die brauchen wir aber nicht, da wir uns hier nur für Vektoren mit zwei Komponenten interessieren. Man sieht, dass die erste Zeile der Matrix für die erste Komponente des Ergebnisvektors $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ „sorgt“ und die zweite Zeile für die zweite Komponente.⁷ Was wir gerade getan haben, bezeichnet man als **Multiplikation** einer Matrix mit einem Vektor.

Die Operation „Matrix mal Vektor“ ergibt einen neuen Vektor. Dass das Superpositionsprinzip bei dieser Operation tatsächlich erfüllt ist, kann man wie folgt überprüfen: Wenn man die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$ einzeln multipliziert und dann die beiden Ergebnisvektoren addiert, ergibt sich dasselbe wie wenn man die Matrix mit dem Summenvektor $\begin{pmatrix} x+t \\ y+u \end{pmatrix}$ multipliziert.⁸ Da jede Matrix eine mathematische Operation mit dem Vektor durchführt, der ja einen quantenmechanischen Zustand darstellt, kann man sie auch als quantenmechanischen **Operator** bezeichnen. In der Vektor-Darstellung der Quantenmechanik sind alle physikalischen Messgrößen durch bestimmte Matrizen gegeben.

Um uns an Matrizen zu gewöhnen, führen wir ein paar einfache Rechnungen durch; zuerst:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

⁷Werner Heisenberg hat die Matrizenrechnung für sich selbst neu erfunden, als er wegen seines Heuschnupfens auf Helgoland zur Kur war. Als er nach Göttingen zurückkehrte, informierte ihn sein Chef Max Born, dass die Mathematiker so etwas schon kannten. Auch Erwin Schrödinger soll wichtige Ideen über Wellenfunktionen während eines Kuraufenthalts entwickelt haben.

⁸Das können Sie gern nachrechnen, um etwas vertrauter mit Matrizen und Vektoren zu werden.

Diese Matrix bewirkt also einen Austausch der beiden Komponenten des Vektors; da wir mit dieser Matrix noch öfters rechnen werden, führen wir für sie eine Abkürzung ein und nennen sie $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Unsere Rechnung von oben lautet jetzt also

$$\hat{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Eine andere einfache Matrix nennen wir $\hat{\mathbf{Z}}$:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und die sorgt dafür, dass die zweite Komponente eines Vektors mit einem Minuszeichen versehen wird:

$$\hat{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Matrizen⁹ genügen uns, um einige zentrale Eigenschaften der Quantenmechanik zu zeigen.

Wir multiplizieren die Matrix $\hat{\mathbf{X}}$ mit dem Vektor $\hat{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\hat{\mathbf{X}} \left(\hat{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \hat{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

So weit, so einfach! Jetzt tun wir „das gleiche, aber andersherum“, also

$$\hat{\mathbf{Z}} \left(\hat{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \hat{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Also: „Erst $\hat{\mathbf{Z}}$, dann $\hat{\mathbf{X}}$ “ ergibt etwas anderes als „erst $\hat{\mathbf{X}}$, dann $\hat{\mathbf{Z}}$ “! Wenn man mehrere quantenmechanische Operatoren nacheinander anwendet, kommt es auf die Reihenfolge an. Quantenmechanische **Operatoren sind nicht vertauschbar!** In etwas gelehrterer Sprache sagt man auch, sie *kommutieren* nicht miteinander, oder sie sind nicht *kommutativ*.

Wenn wir gedanklich ein paar Schritte zurückgehen, sehen wir, dass sich die Eigenschaften von Operatoren, insbesondere deren Nicht-Vertauschbarkeit, letztlich aus dem Superpositionsprinzip ergaben. Operatoren dienen in der Quantenmechanik auch dazu, Messgrößen zu beschreiben. Jeder messbaren physikalischen Größe entspricht ein Operator. Die mathematische Tatsache, dass zwei verschiedene Operatoren in der Regel nicht miteinander vertauschbar sind, entspricht der physikalischen Tatsache, dass zwei Messungen verschiedener Größen sich gegenseitig stören können, was zu nicht genau bestimmten Messergebnissen führt. Das war Thema im Abschnitt 3.2, und was dort nur in Worten geschildert wurde, werden wir in den folgenden Abschnitten mithilfe von Matrizen und Vektoren nachvollziehen.

⁹Sie gehören zu den Paulimatrizen, benannt nach Wolfgang Pauli, der sie im Zusammenhang mit dem Spin des Elektrons erfand.

Eigenartig: Eigenvektoren, Eigenwerte und unscharfe Messungen

Wir hatten im Abschnitt 3.2 die Begriffe „Eigenwert“ und „Eigenzustand“ kennengelernt: Zu jedem Operator gibt es spezielle Zustände, die sich jeweils nur um einen Faktor verändern, wenn der Operator auf sie wirkt. Solche Zustände nennt man Eigenzustände, und die Faktoren nennt man Eigenwerte. *Die Eigenwerte eines Operators sind die möglichen Messwerte der zugehörigen physikalischen Größe. Andere Werte können bei der Messung nicht auftreten.* Nach der Messung ist das System in demjenigen Eigenzustand des Operators, der zum gemessenen Eigenwert gehört. Da wir jetzt Zustände durch Vektoren und Operatoren durch Matrizen darstellen, versuchen wir, **Eigenvektoren** zu unseren einfachen Operatoren \hat{Z} und \hat{X} zu finden und die entsprechenden Eigenwerte zu berechnen.

Wir betreiben hier Quantenmechanik „ganz klein“: Uns interessiert nur, was sich in einem zweidimensionalen Raum abspielt, der zum Beispiel von den Überlagerungen des Grundzustands und des niedrigsten angeregten Zustands eines Atoms gebildet wird. Das reicht bereits völlig aus, um die „merkwürdige“ quantenmechanische Tatsache der Unschärferelation mathematisch zu verstehen. Man sieht sofort, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ normierte Eigenvektoren von \hat{Z} sind:

$$\hat{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird vom Operator \hat{Z} reproduziert und mit dem Eigenwert 1 multipliziert; der andere Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ reproduziert sich auch, wird aber mit dem Eigenwert -1 multipliziert. Mehr normierte Eigenvektoren gibt es nicht. Das hängt damit zusammen, dass *jeder* zweidimensionale Vektor als Überlagerung dieser beiden Eigenvektoren geschrieben werden kann, und dass die beiden Eigenwerte unterschiedlich sind.

Die Eigenvektoren von \hat{X} sind nicht viel schwieriger: Wenn man daran denkt, dass \hat{X} die beiden Komponenten eines Vektors vertauscht, sieht man, dass für einen Eigenvektor diese beiden Komponenten entweder gleich oder entgegengesetzt gleich sein sollten. Wenn man dann noch berücksichtigt, dass Vektoren für quantenmechanische Zustände normiert sein sollten, ergibt sich

$$\hat{X} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{X} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen (Operatoren) \hat{Z} und \hat{X} haben also gleiche Eigenwerte, nämlich +1 und -1, aber unterschiedliche Eigenvektoren. Die Eigenvektoren von \hat{X} sind Überlagerungen der Eigenvektoren von \hat{Z} zu gleichen Teilen:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

und umgekehrt sind die Eigenvektoren von \hat{Z} Überlagerungen der Eigenvektoren von \hat{X} zu gleichen Teilen, wie Sie selbst nachrechnen können, wenn Sie möchten.

Unschärferelation, ganz einfach

Diese mathematischen Vorüberlegungen wirken etwas abstrakt, ermöglichen uns aber zu analysieren, welche entscheidenden Folgen sie für Messungen und deren Unbestimmtheit haben. Angenommen, wir haben eine Messung von \hat{X} durchgeführt¹⁰ und den Wert +1 erhalten. Dann wissen wir aus Abschnitt 3.2, dass nach der Messung unser Atom in dem Eigenzustand von \hat{X} ist, der zum Eigenwert +1 gehört, also in dem Zustand

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

der die beiden Eigenzustände von \hat{Z} zu gleichen Teilen enthält. Eine Messung von \hat{Z} in diesem Zustand wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen der beiden möglichen Werte +1 und -1 liefern, also *maximal unscharf* sein! Das gleiche Ergebnis (maximale Unschärfe der zweiten Messung) erhält man, wenn die \hat{X} -Messung den Wert -1 ergibt, und auch, wenn man umgekehrt erst \hat{Z} und dann \hat{X} misst. Wenn zwei Operatoren nicht miteinander vertauschbar sind, beeinflussen sie sich bei Messungen gegenseitig. Das ist die Wurzel der **Unschärferelation**, und die haben wir nun besser verstanden, oder können zumindest rechnerisch nachvollziehen, wie sie zustande kommt.

Zwei Operatoren \hat{A} und \hat{B} , die nicht miteinander vertauschbar sind, erfüllen *immer* eine Unschärferelation, das heißt, das Produkt ihrer Unschärfen (Standardabweichungen) in einem bestimmten Zustand ist größer als eine Zahl die sich daraus ergibt, dass man auf den Zustand(svektor) erst \hat{A} , dann \hat{B} anwendet und das Ergebnis mit dem vergleicht, das man in umgekehrter Reihenfolge erhält.¹¹ Je größer der Betrag der Differenz zwischen den beiden Ergebnissen ist, desto größer muss das Unschärfeprodukt (mindestens!) sein. In manchen Fällen (etwa bei Ort und Impuls) stellt sich heraus, dass dieser Mindestwert immer gleich ist, *unabhängig vom benutzten Zustand*. Dann ist die Unschärferelation „besonders robust“ und damit auch besonders nützlich für einfache Abschätzungen und Rechnungen, die für *beliebige* Zustände gelten, so wie in Abschnitt 2.6, als wir die Unschärferelation benutzt hatten, um die Stabilität von Atomen (und damit unsere eigene Existenz) zu begründen.

5.2 Noch etwas mehr Mathe für Besserwisser: Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind keineswegs im landläufigen Sinn „komplex“, also kompliziert. Sie sind nicht schwieriger zu verstehen als die zweidimensionalen Vektoren, die im vorigen Abschnitt 5.1 behandelt wurden, und sie helfen dabei, verschiedene Begriffe und Zusammenhänge klarzustellen, die in den bisherigen Kapiteln vielleicht etwas verschwommen geblieben sind.

¹⁰Wir interessieren uns im Augenblick nicht dafür, welche konkrete physikalische Größe dem abstrakten Operator \hat{X} entspricht. Die zwei Dimensionen des Zustands-Raums könnten z.B. zwei Zuständen eines Atoms oder zwei Polarisationen eines Photons entsprechen, aber das interessiert uns im Moment nicht, da wir über *ganz allgemeine* Eigenschaften der Quantenmechanik nachdenken.

¹¹Für alle, die es ganz genau wissen wollen: Man wende auf einen Vektor erst \hat{A} , dann \hat{B} an und bilde das Skalarprodukt mit dem ursprünglichen Vektor. Davon ziehe man das Ergebnis der gleichen Prozedur mit der anderen Operatorenreihenfolge ab und bilde den Betrag. (Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ bezeichnet man die Zahl $x_1 x_2 + y_1 y_2$.)

Wozu überhaupt komplexe Zahlen?

Wir haben immer wieder gesehen, welche zentrale Rolle das Superpositionsprinzip in der Quantenphysik spielt: Jede Überlagerung von zwei möglichen Wellenfunktionen der Quantenmechanik ist wieder eine mögliche Wellenfunktion der Quantenmechanik; nach Richard Feynman ist das „das einzige Mysterium der Quantenmechanik“.

Im Zusammenhang mit dem Superpositionsprinzip traten Begriffe wie „Amplitude“ und „Phasenverschiebung“ auf, wobei gelegentlich erwähnt wurde, dass eine Amplitude auch komplex sein kann. Die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ selbst ist ebenfalls komplex, und all das kann zu Unklarheit und Verwirrung führen. Mit etwas genaueren Kenntnissen über komplexe Zahlen lässt sich die Verwirrung aber auflösen.

Komplexe Zahlen sind nicht kompliziert

Neu an den komplexen Zahlen ist eigentlich nur die **imaginäre Einheit** i . Sie hat die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

und erlaubt damit etwas, das die meisten von Ihnen bisher für verboten hielten, nämlich die Wurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen:

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

Eine **imaginäre Zahl** ist ein beliebiges Vielfaches von i , also etwa $42i$ oder πi . Eine **komplexe Zahl** z ist einfach die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl

$$z = x + iy,$$

wobei x und y reelle Zahlen sind. Man nennt x den **Realteil** von z und y den **Imaginärteil**:

$$x = \operatorname{Re} z \quad ; \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Um mit komplexen Zahlen zu rechnen, denkt man sich am einfachsten Klammern dazu und geht mit $(x + iy)$ so um, wie man es in der Schule für den Umgang mit Klammerausdrücken gelernt hat. So kann man zwei komplexe Zahlen **addieren**:

$$(p + iq) + (r + is) = p + r + i(q + s),$$

der Realteil der Summe ist also die Summe der Realteile der beiden Summanden, genauso für den Imaginärteil. Subtrahieren geht genauso. Die **Multiplikation** macht etwas mehr Arbeit:

$$(p + iq) \cdot (r + is) = p \cdot r + p \cdot is + iq \cdot r + iq \cdot is = p \cdot r - q \cdot s + i(p \cdot s + q \cdot r),$$

der Realteil des Produkts ist also $pr - qs$, der Imaginärteil $ps + qr$, was nicht wirklich übersichtlich ist.

Für unsere Zwecke ist es nützlich, eine anschauliche Darstellung der komplexen Zahlen zu haben. Dazu behandelt man den Realteil und den Imaginärteil ähnlich wie die Komponenten eines zweidimensionalen Vektors im Abschnitt 5.1 und definiert so die **Gauß'sche Zahlenebene**, in der $x = \operatorname{Re} z$ entlang der x -Achse und $y = \operatorname{Im} z$ entlang

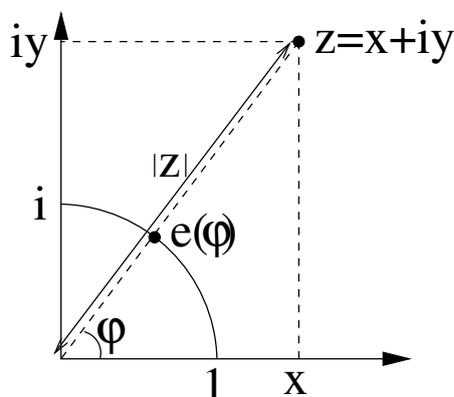


Abbildung 5.2: Die Ebene der komplexen Zahlen. Ähnlich wie einen zweidimensionalen Vektor kann man eine komplexe Zahl $z = x + iy$ entweder durch ihre „Komponenten“ x (Realteil) und y (Imaginärteil) darstellen, oder durch ihren Betrag (Länge) $|z|$ und ihre Richtung (Winkel) φ . Die komplexe Zahl $e(\varphi)$ hat den Betrag Eins und den Winkel φ , liegt also auf dem Einheitskreis um den Nullpunkt der komplexen Ebene. (Grafik: Stolze)

der y -Achse aufgetragen wird (Abbildung 5.2). Man nennt die beiden Achsen auch die reelle und die imaginäre Achse.

Die Ähnlichkeit zur Darstellung zweidimensionaler Vektoren im Abschnitt 5.1 ist offensichtlich. In dem einen Fall sind x und y die Komponenten des Vektors, in dem anderen Fall Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl, und ebenso wie einen Vektor kann man eine komplexe Zahl durch eine Länge und eine Richtung darstellen. Die Länge ist einfach die Entfernung des Punktes $z = x + iy$ vom Nullpunkt der komplexen Ebene. Man nennt diese Länge $|z|$ (lies „Betrag von z “) und sie beträgt nach dem Satz des Pythagoras $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Richtung ist durch den Winkel φ (griechischer Buchstabe Phi) gegeben, und wie sich gleich zeigen wird, ist es für viele Anwendungen praktisch, eine komplexe Zahl $e(\varphi)$ zu definieren, die die Länge Eins und die Richtung φ hat. Mithilfe der Winkelfunktionen Cosinus und Sinus kann man schreiben:

$$e(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

und da für jeden beliebigen Wert des Winkels φ die Beziehung $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1$ gilt, ist klar, dass $|e(\varphi)| = 1$ ist, wie gewünscht. Damit kann man die komplexe Zahl z auch in der Form

$$z = |z|e(\varphi)$$

schreiben. Physiker nennen φ gern auch die **Phase** der komplexen Zahl z , und $e(\varphi)$ einen **Phasenfaktor**. In dieser Darstellung sieht die Multiplikation zweier komplexer Zahlen einfacher aus, was besonders bei der Beschreibung von Interferenz und anderen Überlagerungsphänomenen nützlich ist. Wenn man die komplexe Zahl $z_1 = |z_1|e(\varphi_1)$ mit der komplexen Zahl $z_2 = |z_2|e(\varphi_2)$ multipliziert, dann ergibt¹² sich

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e(\varphi_1) e(\varphi_2) = |z_1| |z_2| e(\varphi_1 + \varphi_2),$$

¹²Wer es nachrechnen möchte, sollte $e(\varphi_1)$ und $e(\varphi_2)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen, „Klammern ausmultiplizieren“, und die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus benutzen.

Die Beziehung $e(\varphi_1)e(\varphi_2) = e(\varphi_1 + \varphi_2)$ zwischen den Phasenfaktoren erinnert an eine Eigenschaft der Exponentialfunktion. Das ist *kein* Zufall, aber die Verbindung zur Exponentialfunktion brauchen wir hier nicht weiter.

in Worten also: *Im Produkt zweier komplexer Zahlen werden die Beträge der beiden Faktoren multipliziert und die Phasen addiert.*

Die anschauliche Darstellung mit Betrag und Phase in der komplexen Zahlenebene ist aber auch bei der Addition nützlich. Um zwei komplexe Zahlen zu addieren, kann man sie einfach in der Zahlenebene „aneinanderfügen“, genauso wie zwei Vektoren in der Abbildung 5.1. Wenn sich dann die Phasen der beiden Zahlen um 180° unterscheiden, sind die Zahlen genau entgegengesetzt zueinander und die Summe wird betragsmäßig kleiner sein als der (betragsmäßig) größere der beiden Summanden. Genau umgekehrt ist es bei gleichen Phasen; dann ist der Betrag der Summe maximal. Das ist der Hintergrund von Ausdrucksweisen wie „gegenphasig“, „gleichphasig“ oder „Phasendifferenz“, die bei der Beschreibung von Interferenzphänomenen im Kapitel 2 immer wieder vorkamen.

Gelegentlich benötigt man zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ die Zahl $z^* = x - iy$. Man nennt z^* die zu z **komplex konjugierte** Zahl. Geometrisch entsteht z^* aus z durch Spiegelung an der reellen Achse. Wenn $z = |z|e(i\varphi)$ ist, dann ist $z^* = |z|e(-i\varphi)$, und man sieht, dass

$$zz^* = |z||z|e(i\varphi - i\varphi) = |z|^2$$

ist, was man auch durch Ausmultiplizieren von $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ gesehen hätte.

Das Superpositionsprinzip: Funktionen sind auch nur Vektoren

Im Abschnitt 5.1 hatten wir uns an die Idee gewöhnt, dass quantenmechanische Zustände eines Teilchens nicht nur als Wellenfunktionen aufgefasst werden können (Wellenmechanik), sondern auch als Vektoren (Matrizenmechanik). In beiden Fällen gilt das Superpositionsprinzip, wie wir uns überzeugt hatten: Eine Überlagerung („gewichtete Summe“) von zwei erlaubten Zuständen ist wieder ein erlaubter Zustand. Erlaubt sind, wie immer, nur normierte Zustände; das muss sichergestellt bleiben.

Die beiden Arten der Darstellung, mit Wellenfunktionen und mit Vektoren, haben unterschiedliche Vor- und Nachteile, je nachdem, welche Fragestellung gerade untersucht werden soll. Die Wellenfunktion gibt Auskunft darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit das betrachtete Teilchen sich an einem bestimmten Ort aufhält. Die Darstellung durch Vektoren ist besser geeignet, die Wahrscheinlichkeiten von Messergebnissen für andere physikalische Größen zu bestimmen. Je nach Art der zu messenden physikalischen Größe können verschiedene Systeme von Vektoren zweckmäßig für die Beschreibung der physikalischen Vorgänge sein; das hatten wir am Beispiel der Matrizen \hat{X} und \hat{Z} und ihrer Eigenzustände bzw. Eigenvektoren im Abschnitt 5.1 (in „Das kleine Vektor-Zweimalzwei“) gesehen. Veränderungen oder Messungen an Zuständen werden auf unterschiedliche Art beschrieben: Vektoren können durch die Anwendung von Matrizen verändert werden (daher der Name Matrizenmechanik), und Wellenfunktionen durch andere mathematische Operationen aus der Differential- und Integralrechnung. Ganz allgemein sprechen wir von *Operatoren*, die auf Zustände einwirken.

Wie schon im Abschnitt 5.1 erwähnt, gelten in der Mathematik alle Objekte als Vektoren, die das Superpositionsprinzip erfüllen, ob es nun „gewöhnliche“ Vektoren in zwei oder drei Dimensionen sind oder Wellenfunktionen. Die „Gewichte“, die in einer Superposition (einer gewichteten Summe) auftreten, dürfen auch komplexe Zahlen sein.

Am Beispiel zweidimensionaler Vektoren haben wir gesehen, wie man Vektoren mithilfe eines Systems von *Basisvektoren* darstellt, die normiert sind, also die Länge 1 haben und aufeinander senkrecht stehen. Eine mögliche Basis sind in diesem Fall die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soweit ist das alles klar, aber was sind denn Basisvektoren im Raum der Wellenfunktionen, und wie kann man „Länge 1“ und „senkrecht aufeinander“ für Funktionen verstehen?

Die Normierung („Länge 1“) einer Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ hatten wir schon im Abschnitt 2.4 kennengelernt: $|\Psi(x, t)|^2$ gibt an, wie sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens über die x -Achse verteilt, und da das Teilchen ja irgendwo auf der x -Achse zu finden sein *muss*, muss die Fläche zwischen der Kurve von $|\Psi(x, t)|^2$ und der x -Achse gleich Eins sein.

Bleibt noch zu überlegen, wie Funktionen senkrecht aufeinander stehen können. Um das zu verstehen, betrachten wir als einfaches Beispiel die Funktionen der Gestalt

$$f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

mit beliebigen Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 . Solche Funktionen nennt man **Polynome vom Grad 3**, nach der höchsten vorkommenden Potenz von x . Eine gewichtete Summe von zwei Polynomen vom Grad 3 ist wieder ein Polynom vom Grad 3, sie gehorchen also dem Superpositionsprinzip und bilden einen Vektorraum. Da man vier Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 benötigt, um einen solchen Vektor festzulegen, kann man dem so entstandenen Vektorraum die Dimension 4 zuschreiben. (Um einen zweidimensionalen gewöhnlichen Vektor festzulegen, benötigt man ja zwei Komponenten x und y .) Leider sind unsere Vektoren $f(x)$ nicht normiert, denn für große Werte von x wächst $f(x)$ über alle Grenzen und die von $|f(x)|^2$ mit der x -Achse eingeschlossene Fläche wird unendlich groß. Das kann man aber verhindern, indem man sich nur auf einen Teil der x -Achse einschränkt, z.B. von $x = -1$ bis $x = +1$. Dann könnte man den vier „Grundfunktionen“ $1, x, x^2$ und x^3 mit geeigneten Vorfaktoren die Normierung aufzwingen. Sie sind alle vier offensichtlich notwendig, um ein Polynom vom Grad 3 aufzuschreiben, aber sie stehen nicht senkrecht aufeinander, wenn man einen für alle Arten von Vektoren einheitlichen abstrakten Begriff von „senkrecht“ verwenden möchte. Um das zu erreichen, muss man bestimmte Kombinationen dieser vier Funktionen bilden, nämlich die normierten Versionen der Funktionen $1, x, 3x^2 - 1$ und $5x^3 - 3x$.¹³

Die Polynome vom Grad 3 auf dem Intervall zwischen $x = -1$ und $x = +1$ bilden also einen vierdimensionalen Vektorraum und die gerade erwähnten Funktionen sind Basisvektoren in diesem Raum. Natürlich können wir auch Polynome von höherem Grad anschauen, etwa vom Grad 99. Diese bilden dann einen 100-dimensionalen Vektorraum. Sie finden das etwas wild? Nun, bereits das einfachste aller Atome, das Wasserstoffatom, hat *unendlich viele* gebundene Zustände, die alle senkrecht aufeinander stehen. Die zugehörigen Wellenfunktionen bilden also einen Vektorraum mit unendlich vielen Dimensionen; das ist schon gewöhnungsbedürftig, jedenfalls für nicht-Mathematiker.

Das Superpositionsprinzip erlaubt eine unendliche Vielfalt von gewichteten Summen einer beliebigen Zahl von Wellenfunktionen, mit komplexen Zahlen als Koeffizienten („Gewichten“), so dass beliebige Phasenverschiebungen zwischen den „Bestandteilen“

¹³Die allgemeine Definition ist: Zwei Vektoren sind zueinander senkrecht (orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Für zwei gewöhnliche Vektoren ist das Skalarprodukt $x_1x_2 + y_1y_2$; für zwei Wellenfunktionen $\Psi_1(x, t)$ und $\Psi_2(x, t)$ ist es das Integral über alle x von $\Psi_1^*(x, t)\Psi_2(x, t)$, wobei der Stern die komplexe Konjugation bezeichnet. Diese Details des mathematischen Formalismus benötigen wir aber nicht.

möglich sind. Interessante Effekte zeigen sich aber bereits, wenn man Superpositionen von nur zwei Wellenfunktionen betrachtet, wie wir jetzt an einem Beispiel sehen werden.

Phasenverschiebungen verschieben Teilchen

Die Abbildung 5.3 zeigt im obersten Bild die Wellenfunktionen des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands eines harmonischen Oszillators¹⁴. Die Grundzustandswellenfunktion ist die mit dem „Buckel“ bei $x = 0$; wir nennen sie Ψ_0 , und die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands nennen wir Ψ_1 . Beide Zustände sind stationär, ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist also zeitlich konstant.

Wenn man die beiden Wellenfunktionen einfach addiert, also $\Psi_0 + \Psi_1$ bildet¹⁵, werden sich auf der linken Seite (also für negative x) die beiden Funktionen teilweise aufheben und auf der rechten Seite werden sie sich verstärken. Das sieht man besonders deutlich, wenn man nicht die Wellenfunktion selbst, sondern ihr Betragsquadrat, also die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, aufzeichnet. Dann ergibt sich die schwarze Kurve im mittleren Bild. Wenn man die beiden Wellenfunktionen gegenphasig addiert (also voneinander subtrahiert), erhält man für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit die rote Kurve, die auf der linken Seite große Werte zeigt.

Wenn man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Wellenfunktion $\Psi_0 + e(i\varphi)\Psi_1$ berechnet und die Phasendifferenz φ zwischen 0° und 180° variiert, erhält man Bilder, die zeigen wie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit wachsender Phasendifferenz von der rechten auf die linke Seite des Bildes „fließt“. Das zeigt das unterste Bild in der Abbildung, in dem die Phasendifferenz in 45° -Schritten von 0° (schwarz) auf 180° (rot) anwächst.

Während man quantenmechanisch vorsichtig davon spricht, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Oszillators fließt, kann man klassisch einfach sagen, dass der Oszillator sich bewegt. Die Bewegung wird dadurch hervorgerufen, dass sich die Phasenverschiebung φ in der Überlagerungs-Wellenfunktion $\Psi_0 + e(i\varphi)\Psi_1$ ändert. Wie nun die Schrödingergleichung dafür sorgt, dass die Phasenverschiebung sich mit der Zeit regelmäßig ändert, machen wir uns im nächsten Abschnitt klar.

Stationäre Zustände und Übergänge zwischen ihnen

Im Abschnitt 3.1 hatten wir die *stationären Zustände* kennengelernt und als besonders nützlich erkannt: Ein stationärer Zustand hat eine bestimmte feste Energie und seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit ändert sich im Laufe der Zeit nicht, daher der Name. In bestimmten Situationen (wenn der Zustand gebunden ist, das Teilchen sich also nicht überall im Raum aufhalten kann) sind nur bestimmte Werte der Energie erlaubt, die Energie ist also *quantisiert*. Wir hatten an einfachen Beispielen gesehen, wie das zustande kommt und damit einen ganz wichtigen Aspekt der Quantenphysik verstanden.

¹⁴Der harmonische Oszillator ist ein Modellsystem, das sowohl in der klassischen als auch in der Quantenphysik verwendet wird, um Schwingungsvorgänge zu beschreiben, beispielsweise die Schwingungen eines CO_2 -Moleküls, die dafür verantwortlich sind, dass CO_2 so starken Einfluss auf das Klima hat. Ein klassischer harmonischer Oszillator ist einfach eine Masse, die an einer Feder oder einem Gummiband auf und ab schwingt.

¹⁵Gemeint ist hier und weiter unten immer die *normierte* Summe, also $(\Psi_0 + \Psi_1)/\sqrt{2}$, wenn Ψ_0 und Ψ_1 normiert sind.

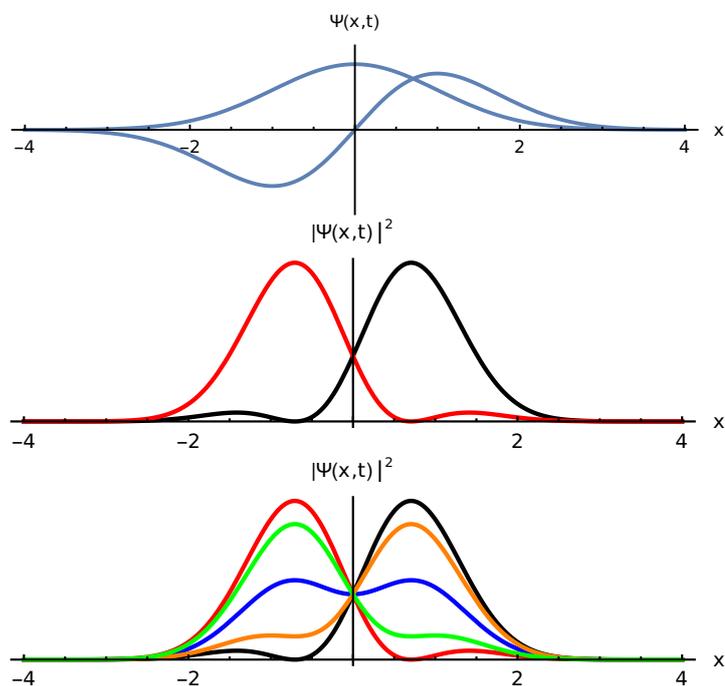


Abbildung 5.3: Die Grundzustandswellenfunktion und die erste angeregte Wellenfunktion eines harmonischen Oszillators. Die Grundzustandswellenfunktion Ψ_0 hat bei $x = 0$ ein Maximum, die erste angeregte Wellenfunktion Ψ_1 hat dort einen Nulldurchgang. Das oberste Bild zeigt diese beiden Wellenfunktionen. Das mittlere Bild zeigt die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zu den Superpositionen $\Psi_0 + \Psi_1$ (schwarz) und $\Psi_0 - \Psi_1$ (rot). Neben diesen beiden Superpositionen mit Phasendifferenz 0° und 180° zeigt das unterste Bild noch die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die Phasendifferenz 45° (orange), 90° (blau) und 135° (grün). (Grafik: Stolze)

Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines stationären Zustands sich im Laufe der Zeit nicht ändert, kann ein solcher Zustand letztlich keine Bewegung beschreiben. Warum stationäre Zustände trotzdem nützlich sind, um Bewegungen zu beschreiben, klären wir jetzt. Der „Trick“ ist, dass man *mehrere* stationäre Zustände überlagern muss, um Bewegung zu sehen. (Denken Sie an Feynman: Das einzige Mysterium ist das Superpositionsprinzip...)

Bei einem stationären Zustand hängt also der Betrag $|\Psi(x, t)|$ der Wellenfunktion gar nicht von der Zeit t ab, sondern nur vom Ort x . Wenn der Betrag nicht von der Zeit abhängt, kann nur noch die Phase davon abhängen, die Frage ist nur, wie. Sie könnte sich zeitlich beliebig ändern, und das unterschiedlich an jedem Ort x . Zum Glück tut sie das aber nicht; das sagt die Schrödingergleichung und das bestätigt auch das Experiment.

Schrödingergleichung Achtung: Enthält höhere Mathematik.

Die **zeitabhängige Schrödingergleichung** für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf der x -Achse bewegt, ist eine Differenzialgleichung in den Variablen x (Ort) und t (Zeit), aus der sich

die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ergibt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t).$$

Am wichtigsten sind hier die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$, also die erste Ableitung nach der Zeit t und die zweite Ableitung nach dem Ort x . Immer wenn mehrere Variable im Spiel sind, bezeichnet man die Ableitungen nicht mit dem üblichen d , sondern mit ∂ , um daran zu denken, dass eben mehrere Variable im Spiel sind, von denen aber gerade nur eine betrachtet wird, während die anderen als konstant angesehen werden; man spricht von **partiellen** Ableitungen und die Schrödingergleichung ist eine **partielle Differenzialgleichung**.

Die **imaginäre Einheit** i hat die Eigenschaft $i^2 = -1$. Sie ist eine **komplexe** Zahl mit Realteil Null und Imaginärteil Eins.

\hbar (lies: „h-quer“) ist die Planck-Konstante h , dividiert durch 2π , m ist die Masse des Teilchens.

$V(x)$ ist die potentielle Energie eines *klassischen* Teilchens am Ort x , die mit den auf das Teilchen wirkenden Kräften verknüpft ist; der Term mit der zweiten Ableitung nach dem Ort hat mit der kinetischen Energie des Teilchens zu tun.

Üblicherweise führt man eine Abkürzung für alle Operationen ein, die auf der rechten Seite der Schrödingergleichung stehen, also an der Wellenfunktion vorgenommen werden. Man schreibt

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

und nennt \hat{H} den **Hamilton-Operator**.

Der Hamilton-Operator enthält über die potentielle Energie die Kräfte, die auf das Teilchen wirken und definiert damit die physikalische Situation. Er bestimmt die zeitabhängige Schrödingergleichung als **Bewegungsgleichung** für die Wellenfunktion. Darüber hinaus bestimmt er auch die möglichen Energiewerte des Teilchens über die **zeitUNabhängige Schrödingergleichung**

$$\hat{H} \phi_i(x) = E_i \phi_i(x).$$

Die Energie E_i kann nur bestimmte Werte E_0, E_1, E_2, \dots annehmen, mit verschiedenen Wellenfunktionen $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ (lies: „Phi-Null von x , ...“). Eine solche Gleichung nennt man **Eigenwertgleichung**, die Zahlen E_i heißen **Eigenwerte** und die Funktionen $\phi_i(x)$ **Eigenfunktionen**. Die Eigenfunktionen $\phi_i(x)$ des Hamiltonoperators beschreiben die **stationären Zustände** des Teilchens, bei denen sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zeitlich nicht ändert.

Die hier auftretende mathematische Situation ist übrigens überhaupt nicht ungewöhnlich. Auch die Schwingungen einer Gitarrensaite werden durch

eine partielle Differenzialgleichung beschrieben, und auch die Gitarrensaiten kann nur in ganz bestimmten Formen schwingen, die ganz bestimmten Tönen (Frequenzen) entsprechen, dem Grundton und den Obertönen. Wenn statt dessen beliebige Frequenzen möglich wären, würde die Gitarre nicht mehr wie eine Gitarre klingen, sondern sehr schräg.

Mit den Details der bei der Lösung der Schrödingergleichung auftretenden mathematischen Manipulationen müssen Sie sich nicht quälen; wir verraten hier einfach die Lösung: Die Phase der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$, die zu einem stationären Zustand mit der Energie E gehört, hängt nicht vom Ort ab und ändert sich proportional zur Zeit, nach dem Gesetz

$$\frac{\varphi}{360^\circ} = -\frac{E}{h}t,$$

wobei h die Plancksche Konstante ist.

Um zu verstehen, was das bedeutet, erinnern wir uns an die Abbildung 5.2 und fragen uns, was eine komplexe Zahl tut, deren Phase sich so verhält wie die Gleichung oben sagt. Angenommen, die Energie E ist positiv; dann nimmt der Winkel φ also immer weiter ab und damit beschreibt die komplexe Zahl eine gleichmäßige Kreisbewegung im Uhrzeigersinn. Da die Winkel $\varphi = 0^\circ, \pm 360^\circ, \pm 720^\circ, \dots$ gleichwertig sind, geht die Bewegung also immer periodisch weiter im Kreis herum, auch wenn die Phase unbegrenzt kleiner oder größer wird. Wir halten fest: Der Wert $\Psi(x, t)$ der Wellenfunktion eines stationären Zustands an einem festen Punkt x im Raum dreht sich in der komplexen Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreis. Die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde ist die *Frequenz* dieser periodischen Bewegung: $f = \frac{E}{h}$. Der Radius des Kreises ist konstant und das Quadrat des Radius gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Punkt x an. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit bleibt also konstant.

So weit, so uninteressant. Nun betrachten wir aber eine *Überlagerung* von zwei stationären Zuständen mit *verschiedenen* Energien E_1 und E_2 . Der Einfachheit halber überlagern wir die beiden Zustände zum Zeitpunkt $t = 0$ mit gleicher Amplitude und gleicher Phase, so wie die beiden Oszillatorzustände in der Abbildung 5.3. Die Phasen der beiden Zustände bleiben aber nicht gleich, da ja deren Energien unterschiedlich sind. Dadurch drehen sich die beiden Zustände unterschiedlich schnell in der komplexen Zahlenebene. Das sorgt für eine Phasendifferenz zwischen den beiden Zuständen, die mit einer Geschwindigkeit proportional zur Energiedifferenz anwächst. Dann tritt genau die Situation ein, die unten in der Abbildung 5.3 dargestellt ist: Mit wachsender Phasendifferenz ändert sich die Gestalt der Wellenfunktion und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit verlagert sich, das Teilchen bewegt sich also.

In der Abbildung 5.3 (unterstes Bild) ist dargestellt, wie sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit verändert, wenn die Phasendifferenz von 0° auf 180° anwächst; beim weiteren Anwachsen von 180° auf 360° (also effektiv 0°) „schwappt“ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesem Beispiel genau spiegelbildlich wieder zurück. Das liegt an der besonders einfachen Struktur der Wellenfunktionen, die hier gewählt wurden; im Allgemeinen kann das zeitliche Verhalten der Aufenthaltswahrscheinlichkeit komplizierter aussehen, aber immer wenn die Phasendifferenz 360° (oder ein Vielfaches davon) erreicht hat, ist das System wieder im Ausgangszustand und die Bewegung beginnt von vorn. Das bedeutet: Eine Überlagerung von zwei stationären Zuständen mit

Energien E_1 und E_2 , mit $E_2 < E_1$, durchläuft eine periodische Entwicklung mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{h}(E_1 - E_2).$$

Ähnliche Beziehungen zwischen Energien und Frequenzen kennen wir schon aus dem Abschnitt 2.4: Planck und Einstein kamen zu der Überzeugung, dass ein elektromagnetisches Feld Energie nur in Form von Quanten der Größe $E = hf$ aufnehmen oder abgeben kann. Im Abschnitt 3.1 erwähnten wir, dass beim Übergang zwischen zwei stationären Zuständen mit Energiedifferenz ΔE elektromagnetische Strahlung der Frequenz $f = \frac{\Delta E}{h}$ auftritt. Für diesen Vorgang können wir uns jetzt ein einfaches „klassisches Bild“ machen: In einem Überlagerungszustand bewegt sich Aufenthaltswahrscheinlichkeit periodisch mit der Frequenz f , und damit auch Ladung, denn die Teilchen in einem Atom sind ja geladen. Eine mit der Frequenz f hin und her schwingende Ladung erzeugt aber elektromagnetische Wellen mit genau dieser Frequenz; das weiß man aus der klassischen Elektrodynamik. Diese klassische Vorstellung ist aber zu einfach, denn sie führt sofort in Widersprüche, wenn man sie weiter verfolgt: Eine „klassisch schwingende“ Ladung gibt allmählich (und nicht quantisiert) Energie ab, und das führt dazu, dass die negativ geladenen Elektronen auf den positiv geladenen Atomkern stürzen und alle Atome instabil sind. Wie im Abschnitt 2.6 dargestellt, verhindert aber die Quantenmechanik mithilfe der Unschärferelation diese Form des Weltuntergangs.

Stationäre Zustände besitzen also *einzelnen* keine physikalisch sinnvolle Dynamik, da sich die zugehörige Aufenthaltswahrscheinlichkeit zeitlich nicht ändert. Wir haben aber gesehen, dass Überlagerungen mehrerer stationärer Zustände Bewegungen im Raum ermöglichen, da sich die Phasendifferenzen zwischen den Zuständen dauernd ändern und damit zu zeitabhängigen Interferenzen (wie in Abbildung 5.3) führen. Die Gesamtheit aller stationären Zustände für ein gegebenes System bildet eine Basis im Raum sämtlicher möglichen Zustände dieses Systems; das heißt, *jeder* mögliche Zustand des Systems kann als Überlagerung der stationären Zustände beschrieben werden. Je nachdem wieviele Zustände an einer solchen Überlagerung beteiligt sind, werden weitere Berechnungen dann mehr oder weniger mühsam.

Wellenpakete passen auch ins Bild

In diesem Abschnitt haben wir die Bewegung eines Teilchens im Raum mit der Überlagerung von stationären Zuständen erklärt. Im Abschnitt 3.1 haben wir uns schon einmal mit Bewegungen beschäftigt, die wir durch *Wellenpakete* beschrieben haben. Wie passen diese Wellenpakete zu den Überlagerungen stationärer Zustände?

In Abschnitt 3.1 haben wir uns mit *freien* Teilchen befasst, also mit Teilchen, auf die keinerlei Kräfte wirken und die sich frei im gesamten Raum bewegen können. Sie haben daher keine potentielle Energie und die stationären Zustände sind relativ leicht aus der Schrödingergleichung zu bestimmen. Da die freien Teilchen räumlich nicht eingeschränkt sind, können sie beliebige (kinetische) Energie E besitzen. Damit ist der dazugehörige Impuls p des Teilchens betragsmäßig festgelegt, da die kinetische Energie $E = \frac{p^2}{2m}$ ist. Die Richtung des Impulses hat (in einer Dimension, wie immer bei

uns) nur zwei Möglichkeiten. Die Wellenfunktion ist eine Welle¹⁶, deren Wellenlänge λ mit dem Impuls zusammenhängt: $p = \frac{h}{\lambda}$. All diese Zusammenhänge haben wir in früheren Abschnitten schon kennengelernt. Die Phase der Wellenfunktion ändert sich entsprechend der Energie, wie eben besprochen, und der gesamte Zustand durchläuft an jedem Ort x eine periodische Bewegung mit der Frequenz $f = \frac{E}{h}$. Pro Sekunde laufen also an einem festen Punkt f Wellenberge (oder Täler) vorbei, und damit ist die Geschwindigkeit der Welle $v_{\text{Welle}} = \lambda f$. Wenn wir nun berücksichtigen, wie λ mit p und f mit E und damit auch mit p zusammenhängt, dann erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v_{\text{Welle}} = \frac{p}{2m}.$$

Diesen Zusammenhang hatten wir auch schon im Abschnitt 3.1 benutzt. Da die Geschwindigkeit einer Welle vom Impuls p und damit von der Wellenlänge λ abhängt, verändern Wellenpakete im Lauf der Zeit ihre Form, wie im Abschnitt 3.1 diskutiert. Auch bei den Wellenpaketen handelt es sich also um Überlagerungen stationärer Zustände. Auch hier kann ein einzelner stationärer Zustand keine Bewegung beschreiben, denn seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist konstant im Raum und in der Zeit.

¹⁶ Genauer ausgedrückt, ist die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ komplex, mit einem konstanten Betrag, denn die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines freien Teilchens ist ja überall gleich. Die Phase φ bestimmt gemäß $e(\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ den Realteil und den Imaginärteil der Wellenfunktion. Wir haben es also eigentlich mit *zwei* Wellen zu tun, für Real- und Imaginärteil. In früheren Kapiteln hatten wir der Einfachheit halber immer nur den Realteil betrachtet.

Kapitel 6

Spins, Quantencomputer, Katzen und Spione.

In diesem Kapitel sollen weitere Aspekte der Quantenphysik behandelt werden, die für technische Anwendungen und auch für unser tägliches Leben schon jetzt große Bedeutung haben oder zukünftig noch bekommen könnten.

Eine Größe, die in diesem Zusammenhang sehr wichtig ist, ist der *Spin* eines Teilchens, manchmal auch Eigendrehimpuls genannt. In Abschnitt 6.1 lernen wir diese Größe zunächst einmal kennen.

Im Abschnitt 6.2 wird erklärt, wie man Spins für Einblicke in den menschlichen Körper nutzen kann (*Magnetresonanz-Tomographie*) und auch für die Aufklärung von Molekülstrukturen in der Chemie und Biologie.

In Kapitel 5 hatten wir gesehen, wie wichtig Superpositionen (Überlagerungen) von mehreren Zuständen in der Quantenmechanik sind, und wie viele Phänomene darauf zurückzuführen sind. Das gilt auch für die verschiedenen Zustände, die ein Teilchen mit Spin einnehmen kann. Wenn man mehrere Spins zusammenschaltet, ergeben sich extrem viele Möglichkeiten für Superpositionszustände, die man nutzen kann, um *Quantencomputer* zu bauen. In Abschnitt 6.3 wird erklärt, warum ein Quantencomputer mehr kann als ein heutiger, auf der klassischen Physik basierender Computer. Er kann zum Beispiel die üblichen Verschlüsselungen *brechen*, die benutzt werden, um vertrauliche Daten (über Kreditkarten, Bankkonten,...) im Internet zu übermitteln. Zum Glück kann man aber die Quantenmechanik auch dazu benutzen, sichere Verschlüsselungen zu *erzeugen*. Diese Anwendung der Quantenmechanik nennt man *Quantenkryptographie*; ein Versuch dazu befindet sich im *Treffpunkt Quantenmechanik* im Aufbau. Das in diesem Versuch demonstrierte einfache Verfahren zur „Schlüsselverteilung“ wird im Abschnitt 6.3 erklärt.

Im letzten Abschnitt 6.4 wird es noch einmal anstrengend, was die Anschaulichkeit angeht, weil es um Superpositionen geht, die zur *Verschränkung* zwischen zwei (oder mehr) Systemen führen. Was das ist und was es mit der berühmt-berüchtigten Katze des Herrn Schrödinger zu tun hat, werden wir dann sehen. Mehrere Physik-Nobelpreisträger werden auftauchen und wir werden der Frage nachgehen, ob die Quantenmechanik so etwas wie Teleportation möglich macht.

6.1 Was ist ein Spin?

Vielleicht haben Sie schon einmal von einem „angeschnittenen Ball“ gehört, beim Tennis oder Tischtennis. Der Spieler gibt dabei dem Ball eine Drehung um die eigene Achse mit, die die Flugbahn und den Aufprall auf dem Tisch oder dem Boden verändert und damit den Gegner verwirrt. Eine Variante ist als „Topspin“ bekannt; allgemein bedeutet das englische Wort „spin“ soviel wie „Dreh“ oder „Drehung“. Wieviel „Dreh“ so ein Ball hat, misst die Physik mit dem **Drehimpuls**; der hängt davon ab, wie groß und wie schwer der Ball ist, wie seine Masse verteilt ist und natürlich, wie schnell er sich dreht. Auch Systeme aus mehreren physikalischen Objekten können einen Drehimpuls besitzen, z.B. die Erde und die Sonne bei ihrem Umlauf um den gemeinsamen Schwerpunkt¹. Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung drücken (unter anderem) aus, dass der Drehimpuls in diesem System erhalten bleibt, sich also zeitlich nicht ändert.

Auch die Rotationsbewegung der Erde um ihre eigene Achse besitzt einen Drehimpuls, der erhalten bleibt². Der Drehimpuls hat nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung; er ist also ein Vektor. Bei der Rotation der Erde zeigt der Vektor des Drehimpulses entlang der Erdachse, und zwar vom Südpol zum Nordpol.

Ebenso wie die Erde beim Umlauf um die Sonne kann auch ein quantenmechanisches Teilchen, z.B. ein Elektron in einem Atom, aufgrund der Bewegung um den Atomkern einen Drehimpuls besitzen. Man spricht dann vom **Bahndrehimpuls**, auch wenn wegen der Unschärferelation der Begriff der Bahn in der Quantenmechanik eigentlich sehr zweifelhaft ist. Genau wie die Erde besitzt das Elektron aber zusätzlich einen **Eigendrehimpuls** oder **Spin**, der analog zur Erdrotation um die eigene Achse ist. Diese anschauliche Vorstellung darf man aber auf keinen Fall zu sehr strapazieren, da das Elektron im Rahmen der heute erreichbaren Messgenauigkeit *punktförmig* ist, und die Drehung eines Punktes „um seine eigene Achse“ begrifflich extrem problematisch ist.

In der klassischen Physik kann der Drehimpuls eines Teilchens eine beliebige Größe annehmen und in eine beliebige Richtung zeigen. Im Gegensatz dazu ist in der Quantenmechanik der Drehimpuls eines Teilchens *quantisiert*. Die natürliche Einheit für alle quantenmechanischen Drehimpulse ist die durch 2π dividierte Planck-Konstante \hbar (lies: „h-quer“):

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

Diese Größenordnung ist so extrem viel kleiner als die Genauigkeit jedes alltäglichen Messgeräts, dass für den Alltag die Drehimpulsquantisierung auf den ersten Blick vollkommen irrelevant ist. Der Drehimpuls der Erdrotation ist beispielsweise (grob) 10^{67} mal so groß wie \hbar , der Drehimpuls des langsamen Zeigers einer sehr kleinen Damen-Armbanduhr immer noch 10^{20} mal so groß. Wir werden aber sehen, dass die Drehimpulsquantisierung dennoch auch für die Gesundheit vieler Menschen wichtig ist.

Die Drehimpulsquantisierung gehorcht bestimmten Regeln, die wir nun aufführen und die sich aus den mathematischen Eigenschaften der *Operatoren* ergeben, die man zur Beschreibung von Drehimpulsen benötigt. Der Drehimpuls (genauer: der Bahndrehimpuls) lässt sich auf die physikalischen Größen Ort und Impuls zurückführen, und aus

¹Da die Masse der Sonne sehr viel größer ist als die der Erde, liegt der gemeinsame Schwerpunkt tief im Inneren der Sonne, und man kann auch vereinfachend sagen, dass die Erde sich um die Sonne bewegt.

²Jedenfalls, wenn man nicht zu genau hinschaut: Die Gezeiten der Ozeane und des nicht völlig starren Erdkörpers sorgen für eine sehr langsame Abbremsung der Rotation.

deren mathematischen Eigenschaften (als Operatoren) ergeben sich die des Drehimpulses. Da Ort und Impuls in einer Unschärferelation miteinander stehen, erwarten wir Unschärfe-Effekte auch für den Drehimpuls.

Operator

Operatoren beschreiben mathematisch Manipulationen an einem quantenmechanischen Zustand, beispielsweise im Zusammenhang mit Messungen einer physikalischen Größe. Weil Zustände verschiedene mathematische Darstellungen erlauben, können auch Operatoren in unterschiedlichen Gestalten auftreten. Wenn ein Zustand als Wellenfunktion $\Psi(x)$ geschrieben wird, kann ein Operator zum Beispiel eine Ableitung nach der Variablen x sein, oder die Multiplikation mit einer anderen Funktion $f(x)$. Wenn ein Zustand als Vektor dargestellt wird, sind die Operatoren Matrizen. Näheres zu Vektoren und Matrizen findet sich im Abschnitt 5.1.

Der *Bahndrehimpuls* eines Teilchens bezüglich eines Bewegungszentrums kann nur ganzzahlige Vielfache von \hbar betragen, also $0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$, usw. Beim *Spin* gibt es dagegen zwei Möglichkeiten. Eine Gattung von Teilchen hat ganzzahligen Spin (in Einheiten von \hbar , natürlich), eine andere Gattung hat halbzahliges Spin, also $\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \frac{5}{2}\hbar$, usw. Die Teilchen mit ganzzahligem Spin nennt man *Bosonen*, die anderen *Fermionen*, wie im Abschnitt 2.6 schon einmal kurz erwähnt.

Neben diesen Bedingungen für den Betrag des Drehimpulses ergeben sich weitere Einschränkungen für die Richtungen bzw. die einzelnen Komponenten des Drehimpulses, der ja ein Vektor ist. Man kann *eine* Komponente des Spins (oder des Bahndrehimpulses) messen; traditionell nennt man diese Richtung z (und die anderen beiden x und y , aber die sind sowieso meist uninteressant). Für ein Teilchen mit ganzzahligem Spin, z.B. Spin $2\hbar$, kann die z -Komponente die Werte von $-2\hbar$ bis $+2\hbar$, in \hbar -Schritten haben, also die Werte $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$. Für Teilchen mit halbzahligem Spin gilt die gleiche Regel, also hat für ein Fermion mit Spin $\frac{3}{2}\hbar$ die z -Komponente die möglichen Werte $-\frac{3}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar$. Wenn die z -Komponente des Spins gemessen ist (und damit *genau* den gemessenen Wert besitzt), sind die beiden anderen Komponenten nur auf einige \hbar genau messbar und deshalb meist uninteressant. All das gilt natürlich auch für Drehimpulse in unserer klassischen Alltagswelt, aber wegen der Winzigkeit von \hbar muss uns diese Unschärfe genausowenig Sorgen machen, wie die Orts-Impuls-Unschärfe aus dem Abschnitt 2.6.

Im Weiteren werden wir uns nur mit **Spin-1/2-Teilchen** beschäftigen. Diese haben also den Spin $\frac{1}{2}\hbar$ und die z -Komponente des Spins kann die Werte $+\frac{1}{2}\hbar$ und $-\frac{1}{2}\hbar$ annehmen. Dies sind auch die beiden einzigen „echt verschiedenen“ quantenmechanischen Zustände³ eines solchen Teilchens; alle anderen Zustände sind Superpositionen dieser beiden. Wegen der entweder positiven oder negativen z -Komponente des Spins bezeichnet man die beiden Zustände mit Pfeilsymbolen: $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Das Symbol $|\ \rangle$ erinnert daran, dass quantenmechanische Zustände als Vektoren in einem abstrakten Raum dargestellt werden können, wie im Abschnitt 5.1 besprochen.

Der Grund für diese Beschränkung auf Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ ist, dass sowohl Elektronen als auch Protonen und Neutronen diese Eigenschaft haben. Ein weiterer Grund ist

³Das bezieht sich nur auf den Spin des Teilchens; selbstverständlich kann sich das Teilchen, abgesehen vom Spin, noch beliebig im Raum bewegen, ebenso wie der angeschnittene Tischtennisball.

Bequemlichkeit: Ein quantenmechanischer Zustandsraum mit nur zwei Dimensionen ist einerseits besonders einfach, aber andererseits auch kompliziert genug um alle Effekte aufzuweisen, die uns hier interessieren. Alle drei Teilchen, Elektron, Proton und Neutron, besitzen ein *magnetisches Moment*, verhalten sich also wie winzige Magnete⁴, jeweils mit einem Nord- und Südpol. In einem äußeren Magnetfeld richten sich diese Mini-Magnete aus, wie Kompassnadeln. Das äußere Magnetfeld gibt die Richtung vor, bezüglich der sich die Spins ausrichten, also die z -Richtung. Die Teilchen werden also zum Beispiel versuchen⁵, ihren Spin in den Zustand $|\uparrow\rangle$ bringen. Wer schon einmal mit einer Kompassnadel gespielt hat, weiß, dass man eine kleine Kraft aufwenden muss, um ihre Richtung umzukehren; man muss also Arbeit leisten und das heißt, Energie zuführen. In die Quantenmechanik übersetzt, heißt das, einer der Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ wird in einem äußeren Magnetfeld energetisch angehoben und der andere abgesenkt. Die Energiedifferenz ist proportional zur Stärke des Magnetfelds. Genau das ist die Grundlage für die Magnetresonanz, die im nächsten Abschnitt besprochen wird.

6.2 Magnetische Resonanz

Im Abschnitt 3.1 hatten wir gesehen, dass ein Teilchen nur ganz bestimmte Werte der Energie haben kann, wenn seine Bewegung in allen Richtungen durch äußere Kräfte eingeschränkt ist. Wir hatten dort der Einfachheit halber nur eine eindimensionale Bewegung betrachtet, aber schon diese Überlegung war nicht ganz einfach. Für ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ und einem magnetischen Moment in einem Magnetfeld ist die Situation dagegen ganz einfach: Das Teilchen kann nur in den beiden Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ sein. In diesen beiden Zuständen hat die Komponente des magnetischen Moments in Feldrichtung entgegengesetzte Werte und die anderen Komponenten sind unbestimmt; sie sind für die Energie des Teilchens aber auch unwichtig. Es gibt also nur zwei mögliche Energiewerte. Übergänge zwischen den beiden Zuständen mit Energiedifferenz ΔE werden durch elektromagnetische Schwingungen mit der Frequenz f angeregt, wenn $\Delta E = hf$ ist⁶. Wenn die Frequenz diese Bedingung erfüllt, kann das Teilchen sowohl Energie aus dem elektromagnetischen Feld aufnehmen als auch Energie an das Feld abgeben. Dabei springt es zwischen den Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ hin und her und sendet dabei ein messbares Signal aus. Diesen Vorgang bezeichnet man als **magnetische Resonanz**.

Der Bauch in der Röhre

Das Signal der Resonanz ist natürlich um so stärker, je mehr Teilchen in der Messapparatur vorhanden sind, und diesen Umstand macht man sich in der Magnetresonanztomographie (MRT) zunutze, um Bilder aus dem Inneren des menschlichen Körpers zu bekommen. Dazu wird der Patient in das Innere einer großen Spule geschoben, die das Magnetfeld erzeugt, das für die Energiedifferenz zwischen den Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$

⁴Wir gehen auf den Ursprung des magnetischen Moments nicht näher ein, da „anschauliche“ klassische Erklärungsversuche mehr verwirren als klären.

⁵Es können sich nie sämtliche Teilchen in diesen Zustand begeben, da die Wärmebewegung sie immer wieder stört.

⁶Wir nehmen hier an, dass keine weiteren Energieformen im Spiel sind, dass das Teilchen sich also nicht im Raum bewegt oder andere Kräfte außer dem Magnetfeld wirken.

sorgt. Die Teilchen, deren Spin hier manipuliert wird, sind in der Regel⁷ Protonen, also die Atomkerne des einfachsten aller Atome: Wasserstoff. Warum Wasserstoff? Der Körper besteht zum größten Teil aus Wasser, und das enthält Wasserstoff, wie schon die Formel H_2O sagt, und auch das Fettgewebe enthält viel Wasserstoff.

Nun liegt also der Mensch in der „Röhre“, die die Spule umschließt, und diese erzeugt ein Magnetfeld von z.B. 2 T (Tesla, Einheit der magnetischen Flussdichte). Das ist ein ziemlich starkes Feld⁸; das Magnetfeld der Erde ist (in Mitteleuropa) etwa 40.000 mal schwächer. Die Protonen haben bei dieser Feldstärke eine Resonanzfrequenz von 85.16 MHz. (etwa im Bereich von UKW-Radiosendern, deshalb wird auch von Radiofrequenz-Feldern gesprochen). Die Stärke des gemessenen Resonanzsignals gibt dann Auskunft darüber, wieviele Protonen dieser Mensch insgesamt enthält – aber das war eigentlich nicht das Ziel der Untersuchung! Man muss dafür sorgen, dass nur die Protonen in einem kleinen Bereich des Körpers gemessen werden. Das wird erreicht, indem man das Magnetfeld nicht überall gleich stark macht, sondern es beispielsweise, durch zusätzliche Spulen, entlang des Körpers von den Füßen zum Kopf langsam ansteigen lässt. Dann hat das Magnetfeld vielleicht im Bauchbereich genau den richtigen Wert für die Resonanz bei 85.16 MHz, und man misst die Zahl der Protonen in einer dünnen Scheibe im Bauch des Patienten. Mit weiteren messtechnischen und mathematischen Tricks kann man die Dichte der Protonen innerhalb der „Bauchscheibe“ räumlich auflösen und erhält so ein Schnittbild. Durch Veränderung des Magnetfelds kann der gesamte Körper des Patienten nach und nach abgetastet werden. Ein Computer setzt aus den Messwerten ein dreidimensionales Bild des untersuchten Bereichs zusammen, das später von der untersuchenden Ärztin ausgewertet und mit dem Patienten besprochen wird.

Die Untersuchung besteht also aus sehr vielen einzelnen Messungen mit jeweils verschiedenen Einstellungen der beteiligten Magnetfelder. Das rasche Umschalten der Magnetspulen auf verschiedene Feldstärken verursacht die unangenehmen Geräusche, vor denen jeder Patient gewarnt wird, bevor er „in die Röhre“ kommt. Neben diesem Verfahren, das „nur“ ein detailliertes Bild der Wasserstoff-Verteilung im Körper liefert, gibt es noch weitere Möglichkeiten. Man kann die Protonenspins durch kurze Einstrahlung zusätzlicher Radiofrequenz-Felder „aus dem Gleichgewicht“ bringen und dann verfolgen, wie schnell die Spins wieder zum Gleichgewicht zurückkehren. Das ermöglicht genauere Unterscheidungen zwischen verschiedenen Gewebetypen. Diese Details wollen wir aber den Mediziner:innen und Medizinphysiker:innen überlassen. Eindrucksvolle Beispiele für MRT-Aufnahmen finden Sie mühelos im Internet, etwa im Wikipedia-Artikel über Magnetresonanz-Tomographie.

Die Quantenmechanik spielt übrigens noch auf ganz andere Weise eine wichtige Rolle bei der MR-Tomographie. Die Spule, die das konstante starke Magnetfeld (von 2 T in unserem Beispiel) macht, besteht aus *supraleitendem* Draht. Supraleitung nennt man die Tatsache, dass manche Materialien bei sehr tiefen Temperaturen elektrischen Strom völlig ohne Widerstand leiten. Eine Spule aus solchem Material wird unter Strom gesetzt, und anschließend werden die Enden der Spule (supraleitend) miteinander verbunden. Der Strom fließt danach ohne Widerstand (und damit ohne Energiezufuhr) immer weiter im Kreis, solange die Temperatur tief genug bleibt. Das Phänomen Supraleitung ist nur mithilfe der Quantenmechanik zu verstehen, allerdings erst nach einem längeren Anlauf (2-3 Jahre Studium) durch die verschiedenen Gebiete der Physik.

⁷Für sehr spezielle Zwecke benutzt man auch andere Atome, die entweder im Körper vorhanden sind, oder als Kontrastmittel eingeführt werden.

⁸Je stärker das Feld ist, desto stärker ist auch das gemessene Signal.

Stimmt die Chemie?

Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet der Magnetresonanz ist die Chemie, wo sie eine Standardmethode für die Analyse und die Bestimmung von Molekülstrukturen ist. Neben Wasserstoff sind für die Chemie noch viele andere Atome interessant, deren Atomkerne einen Spin besitzen. Die Resonanzfrequenz eines Atomkerns hängt davon ab, welche anderen Atome in seiner Nachbarschaft sind, und wie diese angeordnet sind. Das wird als *chemische Verschiebung* bezeichnet.

Wenn zwei oder mehr gleiche Atome nahe beieinander sind, können sie miteinander wechselwirken und es kann zu einer Veränderung des Resonanzverhaltens im Sinne einer Aufspaltung der ursprünglichen Resonanz kommen. Dabei entstehen zwei oder mehr Resonanzen mit leicht unterschiedlicher Frequenz. Dieses Phänomen kennt man auch aus der Mechanik: Zwei gleich lange Pendel schwingen mit gleicher Frequenz, aber wenn man sie koppelt (z.B. mit einem schwachen Gummiband) beobachtet man zwei verschiedene Schwingungsformen mit leicht erhöhter/erniedrigter Frequenz. Ein zwei-Minuten-Video dazu findet sich unter <https://www.youtube.com/watch?v=Wk7YSEJIGDs>.



Die übliche Einheit für die chemische Verschiebung sind ppm (parts per million). Die ursprüngliche Resonanz verschiebt sich also nur sehr geringfügig und die Messungen müssen entsprechend genau sein. Eine *absolute* Angabe von Resonanz-Verschiebungen, etwa in der Einheit Hz, wäre übrigens sehr unpraktisch, denn alle Frequenzen in der Magnetresonanz sind proportional zur Stärke des Magnetfelds, und es gibt viele verschiedene Geräte mit unterschiedlichen Magnetfeldern. Natürlich sind schon sehr viele Substanzen mit der Magnetresonanz untersucht worden, und ihre „Fingerabdrücke“ sind in Datenbanken gespeichert, so dass ein an das Spektrometer angeschlossener Computer sofort die Information liefert, ob Ihre Probe Wasser, Alkohol oder eine bestimmte Fettsäure enthält. Weniger automatisch ist die Bestimmung einer Molekülstruktur. Hier hat man es in den interessanten Fällen (die nicht schon in der Datenbank sind) mit vielen Resonanzen zu tun, und man muss z.B. gezielt bestimmte Teile des Moleküls abtrennen, ersetzen oder andere Teile zufügen und sehen, wie sich die Spektren ändern, um eine Idee zu bekommen, welche Atome mit welchen anderen in enger Wechselwirkung stehen.

6.3 Quantencomputer und Codes

Die Magnetresonanz nutzt die Tatsache aus, dass die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ in einem Magnetfeld unterschiedliche Energien haben und dass Übergänge zwischen diesen Zuständen mit Aufnahme oder Abgabe von Energie verbunden sind. Systeme mit nur zwei möglichen Zuständen sind auch auf einem ganz anderen Wissensgebiet wichtig, nämlich in der *Informatik*. Alle gängigen Computer arbeiten mit binären Ziffern, kurz *Bits* genannt, die in zwei Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ vorliegen können. (Wir nutzen hier wieder das Symbol $|\ \rangle$, um daran zu erinnern, dass es nicht etwa um die Anzahlen 0 und 1 von irendetwas, sondern um zwei *Zustände* geht.) Diese beiden Zustände können technisch auf verschiedene Art realisiert werden:

ein Schalter ist offen oder geschlossen, ein Kondensator ist geladen oder ungeladen und so weiter. Wichtig ist, dass die beiden möglichen Zustände eines Bits gut zu unterscheiden sind, so dass der Zustand jedes einzelnen Bits jederzeit eindeutig festliegt.

Natürlich kann man auf die Idee kommen, dass auch ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ als Bit verwendet werden kann, denn es hat ja auch die beiden Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. So ein Teilchen wäre dann ein quantenmechanisches Bit oder kurz, ein **Qubit**. Es gibt aber einen entscheidenden Unterschied zwischen dem Schalter oder Kondensator in einem herkömmlichen Computer und dem Zustand eines Qubits: Wie wir besonders im Kapitel 5 diskutiert haben, kann ein quantenmechanisches System in einer *Superposition* von zwei oder mehr unterschiedlichen Zuständen vorliegen, anders als ein herkömmliches (klassisches) Bit. Ist das nun gut oder schlecht? Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass ein Computer mit Qubits spektakuläre Möglichkeiten bietet. Es gibt bereits viele verschiedene Vorschläge für den Bau eines solchen **Quantencomputers**, alle mit ihren eigenen technischen Vor- und Nachteilen, die wir hier nicht besprechen können. Die *prinzipiellen* Vorteile eines Quantencomputers kann man sich aber auch klarmachen, ohne in die technischen Details zu gehen.

In Kapitel 5 wurde dargestellt, dass quantenmechanische Zustände als *Vektoren* dargestellt werden können, weil sie dem Superpositionsprinzip gehorchen: Eine Überlagerung von zwei Vektoren ist ebenfalls ein Vektor. Wir hatten der Einfachheit halber mit zweidimensionalen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gearbeitet, die wir als Superposition von zwei *Basisvektoren* schreiben konnten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zugegeben, das sah alles etwas abstrakt aus, aber jetzt haben wir ein konkretes physikalisches Beispiel für ein System mit zwei Basiszuständen, nämlich ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$, und wir identifizieren dessen Basiszustände mit den abstrakten zweidimensionalen Vektoren:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sehen wir auch, was der in Kapitel 5 definierte abstrakte Operator

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

konkret tut:

$$\hat{Z}|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +1|\uparrow\rangle \quad \text{und} \quad \hat{Z}|\downarrow\rangle = -1|\downarrow\rangle.$$

Der Operator \hat{Z} liefert also bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}\hbar$ die z -Komponente des Spins, oder anders: $\frac{1}{2}\hbar\hat{Z}$ ist der Operator für die z -Komponente des Spins. Genau zu diesem Zweck hat Wolfgang Pauli vor etwa einem Jahrhundert die Matrizen oder Operatoren \hat{Z} und \hat{X} erfunden. Sie dürfen jetzt raten, welcher physikalischen Größe der Operator \hat{X} entspricht.

Zurück zu den Qubits: Wenn wir unsere beiden Basiszustände für ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ mit den beiden Basiszuständen eines quantenmechanischen Bits identifizieren, also

$$|0\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |1\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, dann können wir anfangen, klassische und quantenmechanische Computer zu vergleichen. Ein klassisches Bit kann *entweder* im Zustand $|0\rangle$ oder im Zustand $|1\rangle$ sein. Dagegen kann ein Qubit in jedem Superpositionszustand

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

sein. Dabei sind α und β komplexe Zahlen, die die Normierungsbedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ erfüllen müssen. (Für die mathematischen Begriffe bitte notfalls noch einmal Kapitel 5 überfliegen.) Das sind unendlich viel mehr Möglichkeiten als das klassische Bit hat!

Kann ein Qubit also unendlich viel mehr Information speichern als ein klassisches Bit? Auf den ersten Blick ist das so, denn die beiden komplexen Zahlen α und β enthalten die relative Gewichtung zwischen den beiden Anteilen des Zustands und außerdem eine Phasendifferenz zwischen ihnen. Das lässt sich durch zwei reelle Zahlen ausdrücken, und eine einzige reelle Zahl enthält im Prinzip bereits unendlich viel Information, wie man z.B. an einer sehr bekannten reellen Zahl sieht:

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862\dots$

Leider kann man aber die in den komplexen Zahlen α und β enthaltene Information nicht komplett auswerten, denn man muss dazu ja an dem Zustand $|\Psi\rangle$ eine *Messung* durchführen. Messungen aber verändern Zustände und haben (meistens) mehrere mögliche Ergebnisse. Angesichts dieser Unsicherheiten kann man sich in der Tat fragen, ob ein Qubit *überhaupt* Information verlässlich speichern kann. Immerhin kann man aber mathematisch beweisen, dass ein einzelnes Qubit doppelt so viel Information speichern kann wie ein klassisches Bit. Auf die nicht ganz einfachen Details gehen wir hier nicht weiter ein.

Messungen verändern Zustände

Wenn ein Teilchen in einem Zustand Ψ ist und an diesem Teilchen eine (Einzel-) Messung durchgeführt wird, dann ist nach der Messung der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* Ψ , sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat. *Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.*

Ein einfaches Beispiel ist eine Messung, die feststellt, „auf welcher Seite“ ein Teilchen ist, also bei $x > 0$ („rechts“) oder bei $x \leq 0$ („links“). Vor der Messung, im Zustand Ψ , hält sich das Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit links und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit rechts auf. (Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten beträgt natürlich Eins.) Die Messung versetzt das Teilchen *entweder* in einen Zustand Ψ_{rechts} oder in einen Zustand Ψ_{links} . Wenn der Messwert „rechts“ gemessen wurde und man führt unmittelbar nach der ersten Messung eine zweite durch (ohne ansonsten irgendwie auf das Teilchen einzuwirken), dann wird das Ergebnis mit Sicherheit wieder „rechts“ sein.

Die erste Messung hat hier den Zustand festgelegt. Man sagt, der anfängliche Zustand Ψ sei zum Zustand Ψ_{rechts} **kollabiert** oder auf diesen Zustand **reduziert** worden. Die Zustände Ψ_{rechts} und Ψ_{links} bezeichnet man als **Eigenzustände** der Messgröße „Seite“. Ein Eigenzustand ist ein Zustand, in dem die Messung der zugehörigen Größe mit Sicherheit einen ganz bestimmten

Wert (den **Eigenwert**) liefert.

Nach der Messung entwickelt sich der Zustand des Teilchens gemäß der Schrödingergleichung weiter, und damit kann sich das Teilchen möglicherweise auch wieder nach links bewegen, so dass die durch die Messung festgelegte Eigenzustands-Eigenschaft wieder verloren geht. Darum erhält man auch nur dann bei den beiden geschilderten Messungen gleiche Ergebnisse, wenn sie *unmittelbar* nacheinander ausgeführt werden.

Interessanter an dem Superpositionszustand $|\Psi\rangle$ ist die Tatsache, dass das Qubit „zur gleichen Zeit in zwei Zuständen ist“. Wenn man einen solchen Zustand gezielt verändert, indem man zum Beispiel bestimmte äußere Kräfte anwendet, dann macht man im Grunde nicht *ein* Experiment, sondern man macht *zwei* Experimente parallel, ausgehend von den beiden Qubit-Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Das geht aber noch viel besser: Wenn man zwei Qubits zusammen betrachtet, dann gibt es für deren Zustand schon vier Möglichkeiten, nämlich $|0\rangle|0\rangle$, $|1\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle$ und $|1\rangle|1\rangle$, bei drei Qubits acht, ... und bei 10 Qubits 1024 Möglichkeiten, die man dann parallel behandeln kann. Das ist der sogenannte **Quantenparallelismus**, der es einem Quantencomputer möglich macht, bestimmte Probleme (nicht alle!) viel schneller zu lösen als ein klassischer Computer.

Auf den ersten Blick erscheint es allerdings sehr umständlich, eine Superposition von sehr vielen Zuständen herzustellen. Tatsächlich benötigt man aber keineswegs 1024 Schritte, um eine Superposition der 1024 möglichen Zustände von 10 Qubits zu erzeugen, sondern *sehr viel weniger*:

- Schritt 1 bis 10: Bringe jedes der 10 Qubits in den Zustand $|0\rangle$ bzw. $|\uparrow\rangle$. Ergebnis:

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle\dots|\uparrow\rangle.$$

- Schritt 11-20: Wende auf jedes der 10 Qubits die Operation

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Z} + \hat{X}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

an; das Ergebnis ist dann für jedes Qubit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Z} + \hat{X})|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

(bitte nachrechnen!) und insgesamt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)\dots(|0\rangle + |1\rangle).$$

- Fertig! Wenn man die 10 Klammerausdrücke $(|0\rangle + |1\rangle)$ ausmultipliziert (was man weder tun muss noch tun sollte), erhält man die Überlagerung der 1024 verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten der Basiszustände von 10 Qubits; die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sichern die Normierung des Zustands.

Mit diesem Zustand kann der Quantencomputer dann 1024 verschiedene Rechnungen auf einmal durchführen. Allerdings muss man bedenken, dass man die 1024 Möglichkeiten hier in *einem einzigen* Zustand gespeichert hat, und dass man am Ende eine oder mehrere *Messungen* durchführen muss, um das Ergebnis der Rechnung zu erfahren.

Da Messungen aber den Zustand in der Regel verändern, kann man nur relativ wenig Information aus dem Zustand entnehmen, ohne ihn zu zerstören. Das macht deutlich, welche Art von Problemen besonders für Quantencomputer geeignet sind: Es müssen *vielen Möglichkeiten parallel* untersucht werden, aber nur *wenige Ergebnisse* gefragt sein.

Ein Beispiel dafür ist die Suche in einer „unstrukturierten Datenbasis“. Um es etwas konkreter zu machen, stellen Sie sich vor, sie möchten mithilfe eines Telefonbuchs mit zwei Millionen Einträgen herausfinden, wer in der Goethestraße 42 wohnt. Für diese Art von Suche ist das Telefonbuch offensichtlich nicht richtig strukturiert, und Sie werden im Mittel eine Million Einträge anschauen müssen, bevor Sie den richtigen finden. Mit einem Quantencomputer können Sie den 1996 erfundenen *Grover-Algorithmus* benutzen, der nur etwa 1000 Schritte statt einer Million benötigt. (Allgemeiner gilt: der Algorithmus benötigt etwa \sqrt{N} Schritte bei N Einträgen.) Auf die technischen Details des Algorithmus können wir leider nicht eingehen.

Ein zweites Beispiel betrifft globale Eigenschaften von mathematischen Funktionen $f(x)$, wobei x eine natürliche Zahl (also 1,2,3,...) ist. Dann kann man z.B. die Frage stellen: „Ist $f(x)$ für gerade x immer positiv?“ Eine andere denkbare Situation ist folgende: Es ist bekannt, dass $f(x)$ periodisch ist, dass sich also die Funktionswerte irgendwann wiederholen: $f(N+1) = f(1)$, $f(N+2) = f(2)$, $f(N+3) = f(3)$, und immer so weiter, aber die Zahl N (die Periode) ist nicht bekannt und soll gesucht werden. Das ist auch ein Fall für den Quantencomputer und ist ein Teil des *Shor-Algorithmus* von 1994, der für sehr viel Wirbel gesorgt hat, und dafür, dass Geheimdienste und Militär die Forschung an Quantencomputern unterstützen. Warum, sehen wir im nächsten Abschnitt.

Quanten, Banker und Spione

Wenn jemand im Internet etwas bestellt oder eine Reise bucht, wird bei seriösen Anbietern darauf hingewiesen, dass die übermittelten Daten (Adresse, Bankverbindung, Kreditkartennummer,...) „sicher verschlüsselt“ werden. Das gängige Verfahren ist eine Verschlüsselung mit einem *öffentlichen Schlüssel*, der jedem zur Verfügung steht, der seine Daten übermitteln will. Dieser öffentliche Schlüssel kann aber nur Daten verschlüsseln; zum *Entschlüsseln* benötigt man den zugehörigen *privaten Schlüssel*, den nur der Empfänger besitzt.

Der entscheidende Punkt dabei sind **Primzahlen**. Zur Erinnerung: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29. Man sieht schon, dass diese Folge unregelmäßig aussieht, und man kann Primzahlen nicht systematisch berechnen. Man kann jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen, also etwa $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Das wird aber schwierig, wenn die Zahlen größer werden und nicht mehrere leicht bestimmbare Primfaktoren, wie 2, 3, oder 5 haben. Als Beispiel können Sie ja einmal die Primfaktoren von 29083 bestimmen, aber bitte ohne elektronische Hilfsmittel!

Die öffentlichen Schlüssel benutzen eine sehr lange Zahl, nämlich ein Produkt aus zwei sehr großen Primzahlen, um die Daten zu verschlüsseln, aber zum Entschlüsseln benötigt man die beiden Primfaktoren, die geheim bleiben, weil nur der Empfänger der Daten sie kennt. Die Sicherheit besteht darin, dass alle bekannten Methoden zur Primfaktorzerlegung exponentiell mehr Zeit benötigen, wenn die Zahlen länger werden. Wenn also ein Kreditkartenbetrüger den öffentlichen Schlüssel erfährt, kann er

zwar eines der bekannten Zerlegungsverfahren auf seinem Computer anwerfen, aber ob er das Ergebnis noch zu Lebzeiten erfährt, ist mehr als zweifelhaft.

Das gilt allerdings nur für klassische Computer. Der von Peter Shor 1994 veröffentlichte Quanten-Algorithmus zur Suche nach Primfaktoren benutzt einige mathematische Methoden, auf die wir hier nicht näher eingehen können; das Kernstück ist aber tatsächlich eine bestimmte mathematische Funktion $f(x)$ (x eine natürliche Zahl), die von der zu zerlegenden (sehr großen) Zahl abhängt und eine (sehr große) Periode besitzt, die vergleichsweise schnell von einem Quantencomputer bestimmt werden kann. Man kann in Formeln angeben, wie die Anzahl der Schritte des Algorithmus mit der Länge der zu zerlegenden Zahl anwächst; diese Formeln sind aber für Laien eher undurchsichtig. Wir machen darum ein Zahlenbeispiel und vergleichen den Shor-Algorithmus mit dem besten bekannten klassischen Algorithmus. Angenommen, das klassische Verfahren benötigt bei 50 Ziffern Länge eine Sekunde und das Quantenverfahren braucht eine Stunde, weil klassische Computer heute eben sehr weit entwickelt sind und Quantencomputer noch nicht. Bei 300 Ziffern benötigen beide Verfahren etwa 60 Stunden, und bei 2000 Ziffern ist der Quantencomputer innerhalb eines Jahres fertig, während der klassische Computer etwa solange braucht, wie das Universum bisher besteht: knapp 14 Milliarden Jahre.

Dass der Shor-Algorithmus funktioniert, wurde 2001 demonstriert. Das Beispiel war $15 = 3 \cdot 5$. Das ist natürlich noch steigerungsfähig. Spätestens aber, wenn es Quantencomputer gibt, die mit wirklich großen Zahlen umgehen können, müssen sich Banker und Kaufleute etwas einfallen lassen, um die bisher üblichen Verschlüsselungen zu ersetzen.

In der Tat gibt es bereits jetzt neue Verschlüsselungsverfahren, die auf der Quantenphysik beruhen. Ein einfaches Verfahren für eine spezielle Aufgabe, das schon 1984 von Charles Bennett und Gilles Brassard veröffentlicht wurde und als „BB84-Protokoll“ bekannt wurde, soll hier kurz dargestellt werden, weil es besonders einfach ist. Der im Aufbau befindliche Versuch *Quantenkryptographie* im *Treffpunkt Quantenmechanik* demonstriert dieses Verfahren.

Die Aufgabe ist die **Schlüsselverteilung**, die zunächst erklärt werden muss. Eine nachweislich sichere Methode der Kommunikation oder Datenübermittlung ist die Verwendung eines **Einmalschlüssels**. Ein Schlüssel ist eine Liste von Übersetzungsregeln für die zu übermittelnden Symbole, etwa

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 6 \\ f &\rightarrow g \\ k &\rightarrow m \\ w &\rightarrow q \\ 0 &\rightarrow z \\ &\dots \end{aligned}$$

Diese Übersetzungsregeln werden nacheinander abgearbeitet, also der Buchstabe „a“ durch die Ziffer „6“ ersetzt usw., und zwar *jeweils nur einmal*; das nächste „a“ wird durch ein anderes Zeichen ersetzt. Der Schlüssel muss also genauso lang sein wie die Nachricht, die übermittelt werden soll. Die Tatsache, dass jedes Symbol des Schlüssels nur ein einziges Mal verwendet wird, sorgt für die Sicherheit; ansonsten könnte man etwa nach dem am häufigsten benutzten Symbol suchen und vermuten, dass es dem

häufigsten Buchstaben entspricht, also in deutschen Texten dem „e“. Bei diesem Verfahren müssen natürlich beide Kommunikationspartner (und sonst niemand) den Schlüssel besitzen. In früheren Zeiten bekamen Geheimagenten deshalb Code-Bücher mit auf den Weg, die sie auf keinen Fall verlieren durften.

Heute können zwei Partner mit quantenmechanischer Hilfe einen gemeinsamen Schlüssel herstellen, vorausgesetzt, sie können *Photonen* austauschen. Wie in allen Diskussionen über Kommunikation mit quantenmechanischen Mitteln sollen die Partner *Alice* und *Bob* heißen, und manchmal ist noch *Eve* dabei, die ihren Namen vom englischen „to eavesdrop = heimlich belauschen“ hat. Alice und Bob benutzen zur Informationsübertragung einzelne Photonen, und zwar insbesondere deren Polarisation. Wenn Sie nicht mehr ganz genau wissen, was es mit der Polarisation auf sich hat, können Sie noch einmal im Abschnitt 3.2 nachlesen, was dort über den Versuch *Polarisation des Lichts* im *Treffpunkt Quantenmechanik* steht; die wichtigsten Tatsachen wiederholen wir hier aber noch einmal kurz.

Polarisation des Lichts

Elektromagnetische Wellen bestehen aus miteinander gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern, die sich in Raum und Zeit verändern. Bei einer monochromatischen (nur eine Frequenz bzw. Wellenlänge) ebenen Welle im freien Raum stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander und beide stehen senkrecht auf der Richtung, in der das Licht sich ausbreitet. Wenn das elektrische Feld nur in einer Richtung hin und her schwingt, spricht man von einer **linear polarisierten** Welle. Wenn man in Richtung der Wellenausbreitung schaut, kann man zwei grundsätzlich verschiedene Polarisationen (Schwingungsrichtungen) unterscheiden: „rechts und links“ (x -Polarisation) und „auf und ab“ (y -Polarisation). Alle komplizierteren Wellenformen kann man aus diesen Grundformen zusammensetzen.

In der Infobox wird die *klassische* Sichtweise der Polarisation geschildert: Wenn das Licht in einer „schrägen“ Richtung polarisiert ist, dann ist das elektrische Feld eine Überlagerung von Feldern in x -Richtung (\rightarrow) und y -Richtung (\uparrow). Ein Polarisationsfilter in \rightarrow -Richtung blockiert dann die Feldkomponente in \uparrow -Richtung, und nur die Feldkomponente in \rightarrow -Richtung wird durchgelassen.

In der *quantenmechanischen* Sichtweise verfügen die Photonen über einen zweidimensionalen Zustandsraum, dessen Basiszustände den Richtungen \rightarrow und \uparrow entsprechen. Der Zustand eines Photons kann eine beliebige Überlagerung dieser beiden Basiszustände sein. Die Amplituden („Gewichte“) der beiden Basiszustände bestimmen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Photon von Polarisationsfiltern in den Richtungen \rightarrow und \uparrow durchgelassen wird. Beispielsweise ist ein Photon mit Polarisation \nearrow in einem „gleichgewichtigen“ Überlagerungszustand von \uparrow und \rightarrow , und wird deshalb von einem \rightarrow -Polarisationsfilter mit 50% Wahrscheinlichkeit durchgelassen.

Alternativ kann man aber auch als Basiszustände die Zustände mit den Polarisationen \nearrow und \nwarrow verwenden; dann ist ein \rightarrow -Photon eine gleichgewichtige Überlagerung dieser beiden alternativen Basiszustände und wird von einem \nearrow -Polarisationsfilter mit 50% Wahrscheinlichkeit durchgelassen.

Zu einer vorher vereinbarten Zeit und in einem vorher vereinbarten Takt sendet Alice Photonen in Richtung von Bob, und zwar wechselt sie zufällig die Polarisierungen zwischen den Varianten „gerade“ und „schief“. Bei „gerade“ sendet sie (zufällig) ein Photon mit Polarisation \uparrow oder \rightarrow , bei „schief“ sind es die Polarisierungen \nearrow oder \nwarrow . Alice notiert sich zu jedem Photon die Polarisation, mit der sie es gesendet hat. Bob weiß zu diesem Zeitpunkt noch nicht, welche Polarisation Alice gerade benutzt und wechselt zufällig das Polarisationsfilter vor seinem Detektor zwischen \uparrow und \nearrow . Er protokolliert die wechselnden Einstellungen seines Filters und seine Messergebnisse. Wenn Alice ein \uparrow -Photon sendet und Bob das \uparrow -Filter benutzt, dann misst er sicher ein Photon. Sendet sie ein \rightarrow -Photon, dann misst er mit dieser Filter-Einstellung ebenso sicher kein Photon. Sendet sie aber ein „schief“ polarisiertes Photon, dann misst Bob mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Photon oder kein Photon⁹. Wenn also Alices Polarisationsrichtungen nicht zu Bobs Filter passen, erhält Bob kein eindeutiges Ergebnis und diese Messergebnisse sind daher nutzlos. Bob weiß aber noch nicht, welche Ergebnisse eindeutig sind und welche nicht; das klärt sich erst im nächsten Schritt.

Nach Ende der Übertragung verständigen sich Alice und Bob z.B. per Telefon über ihre Einstellungen („gerade“ oder „schief“) für jedes einzelne Photon und werfen alle Messungen weg, die kein eindeutiges Ergebnis haben können, weil die benutzten Einstellungen nicht übereinstimmen. Bei den übrigen Messungen weiß Bob sicher, was Alice gesendet hat, und diese Messergebnisse bilden den Schlüssel. Alice weiß natürlich auch, was sie gesendet hat und was davon eindeutig von Bob gemessen werden konnte. Beide haben damit eine Folge von Nullen (kein Photon gemessen) und Einsen, und eine solche Bitfolge kann man zur Verschlüsselung einer anderen Bitfolge (der eigentlichen Nachricht) verwenden.¹⁰

Es ist nicht schlimm, wenn die Spionin Eve die Telefonleitung abhört und erfährt, dass das Photon Nr. 137 eindeutig gemessen worden ist; diese Information nutzt ihr nichts, denn sie kennt das Ergebnis der Messung ja nicht und das Photon existiert nicht mehr. Eve kann allerdings versuchen, ähnlich wie Bob jedes Photon von Alice zu messen und für das bei der Messung zerstörte Photon ein „gefälschtes“ Photon an Bob weiterzugeben, das dem Ergebnis ihrer Messung entspricht. Da Eve aber in der Hälfte der Fälle das falsche Filter benutzt, werden ihre „Fälschungen“ am Ende in einem Viertel der Fälle nicht mit Alices Original übereinstimmen. Das können Alice und Bob leicht feststellen, indem sie einen kleinen Teil ihres gesicherten Schlüssels opfern, um ihre Daten zu vergleichen (wieder z.B. über die Telefonleitung, die nicht abhörsicher sein muss). Wenn dann etwa ein Viertel der Daten nicht übereinstimmt, können sie sicher sein, dass Eve abgehört hat und müssen sich einen neuen Schlüssel machen.

⁹An dieser Stelle wird in dem Demonstrationsversuch *Quantenkryptographie* (im Aufbau) im *Treffpunkt Quantenmechanik* „gemogelt“, da dort aus technischen Gründen (€€€) nicht wirklich mit einzelnen Photonen gearbeitet werden kann, sondern mit kurzen Lichtpulsen, die jeweils viele Photonen enthalten. In der geschilderten Version wird die Hälfte der Photonen durchgelassen, und ein Zufallsgenerator „korrigiert“ dann das Ergebnis auf „alles durchgelassen“ oder „nichts durchgelassen“. Der quantenmechanische Zufall wird hier also nur simuliert.

¹⁰Dazu kann man die beiden Bitfolgen „bitweise ohne Übertrag addieren“, mit dem Symbol \oplus , nach der Regel $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$ und $1 \oplus 1 = 0$. Das ergibt z.B. für die Nachricht 00111 und den Schlüssel 01001 die verschlüsselte Nachricht $00111 \oplus 01001 = 01110$. Wenn man auf das Ergebnis den Schlüssel 01001 noch einmal \oplus -addiert, erhält man die Nachricht 00111 wieder zurück, wie Sie selbst ausprobieren können.

Was bringt's?

Quantencomputer, oder allgemeiner, Quanteninformation und Quantenkommunikation, bringen also interessante Möglichkeiten mit sich. Allerdings bieten Quantencomputer nur für ganz bestimmte Probleme einen Vorteil; der ist dann aber gewaltig. Für Textverarbeitung oder Spiele sind sie dagegen eher nutzlos. Quanteninformation (ob in Qubits gespeichert oder per Quantenkommunikation ausgetauscht) hat mehrere „Gesichter“. Sie ist sehr *empfindlich*, da sie leicht durch unkontrollierte Wechselwirkung mit der Umgebung des Qubits gestört werden kann oder bei ungeschickten Messungen verloren gehen kann. Sie ist aber auch sehr *sicher*, da sie nicht kopiert werden kann. (Ein Beispiel war die Unfähigkeit von Eve, die von Alice gesendeten Photonen zu fälschen.) Sie ist auch sehr *mächtig*, da Quantencomputer Probleme lösen können, die kein klassischer Computer in einem vernünftigen Zeitraum bewältigen kann.

An der technischen Realisierung von Quantencomputern (die hier nicht behandelt werden kann) arbeiten viele Gruppen von Physiker:innen, Ingenieur:innen und Informatiker:innen in Universitätsinstituten und in den Forschungs- und Entwicklungsabteilungen großer Firmen, wie IBM, Google und Microsoft. Es gibt viele sehr verschiedene Ansätze dafür, wie ein Quanten-Prozessor aussehen könnte; Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ sind bei weitem nicht die einzige dafür geeignete „Hardware“. Auf der anderen Seite arbeiten viele Wissenschaftler:innen an Quantencomputer-Software für verschiedenste Anwendungsgebiete, von Lösungen großer Gleichungssysteme über Berechnungen für die Chemie bis hin zur Risikoanalyse im Finanzwesen.

6.4 Verschränkung, Katzen und Teleportation

Am Beginn dieses Abschnitts ist ein kleiner Warnhinweis angebracht. Wenn Sie beim Lesen nach und nach das Gefühl bekommen, etwas verwirrt zu sein und nicht alles komplett verstanden zu haben, dann seien Sie beruhigt: Die Mehrheit der Physiker:innen war über mehrere Jahrzehnte auch verwirrt, sobald die hier behandelten Themen diskutiert wurden. Deshalb wurden diese Themen auch gern beiseite geschoben, da sie „für die Praxis nicht so wichtig“ waren. Spätestens als sich aber praktische Anwendungen herausstellten, änderte sich das. Wir werden hier mit einem drastischen Beispiel beginnen, das auch immer wieder beschrieben wird (aber nicht immer korrekt): Schrödingers Katze. Da wir uns in den bisherigen Kapiteln an Spins, Zustandsvektoren und andere nicht alltägliche Begriffe gewöhnt haben, können wir auch darstellen, was der ernsthafte Hintergrund für Schrödingers merkwürdiges Beispiel war. Der Begriff der *Verschränkung*, den das Katzen-Beispiel erläutern soll, lässt sich mathematisch einfach fassen, und mithilfe der mathematischen Beschreibung können interessante Anwendungen analysiert werden. Wie wichtig oder „praktisch“ diese Anwendungen sind, wird die Zukunft zeigen; die Quantenmechanik ist auch nach mehr als hundert Jahren noch für Überraschungen gut! Zwei Nobelpreise für Physik (2012 und 2022) sind eng mit dem Inhalt dieses Abschnitts verbunden.

Schrödingers Katze

Erwin Schrödinger veröffentlichte 1935 eine Reihe von Artikeln unter dem Titel „Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik“ und schilderte darin das folgende Ge-

dankenexperiment, um die merkwürdigen Eigenschaften der damals noch neuen Theorie zu illustrieren. Ein radioaktives Atom hat zwei mögliche Zustände: zerfallen oder nicht zerfallen. Man stelle sich nun eine kleine Menge eines radioaktiven Elements vor, so klein, dass in jeder Stunde mit 50% Wahrscheinlichkeit ein Zerfall auftritt, der von einem Geigerzähler registriert wird. Der Geigerzähler löst dann einen Mechanismus aus, der eine Katze tötet. Die Katze wird mit der gesamten Apparatur zusammen in einen verschlossenen Kasten gesperrt, der nach einer Stunde wieder geöffnet werden soll.

Danach ist entweder ein Atom zerfallen und die Katze ist tot, oder es ist kein Atom zerfallen und die Katze lebt noch. Soviel ist klar; aber was ist mit der Katze, solange der Kasten noch verschlossen ist? Liegt hier eine Überlagerung zweier Zustände vor, nämlich „Katze lebt, Atom noch ganz“ und „Katze tot, Atom zerfallen“, und am Ende entscheidet die Messung (Öffnen des Kastens) zufällig, was „wirklich“ passiert? Schrödinger war ein erfahrener Hochschullehrer und hat mit Sicherheit dieses drastische Beispiel ausgesucht, um seine Leser zum Nachdenken und Diskutieren anzuregen. Das taten sie dann auch, und zwar bis heute.

Wir können das Beispiel hier leider nicht zu Ende diskutieren, dazu ist es in der ursprünglichen Form viel zu kompliziert. Schon die radioaktive Substanz besteht aus sehr vielen Atomen, und jedes davon kann intakt oder zerfallen sein. Noch viel komplexer, als quantenphysikalisches System betrachtet, ist natürlich die Katze, denn sie hat astronomisch viel mehr und viel kompliziertere Zustände als die einfachen Alternativen „lebendig“ oder „tot“. All diese Zustände treten in einer Überlagerung auf, kombiniert mit allen möglichen Zuständen der radioaktiven Substanz.

Das Gedankenexperiment mit der Katze wird oft beschrieben, indem etwa gesagt wird, die Katze sei zugleich tot und lebendig. Das ist aber schon falsch, denn wenn man die Quantenmechanik ernst nimmt (und das muss man, sonst kann man diese Diskussion gleich ganz sein lassen), dann hat die Katze *für sich allein* keinen definierten Zustand. Der Zustand der Katze ist untrennbar verbunden mit dem Zustand der radioaktiven Substanz. Schrödinger hat dafür den Begriff **Verschränkung** verwendet. Das Gesamtsystem „Katze plus radioaktive Substanz“ hat einen ganz bestimmten quantenmechanischen Zustand, und der ist eine Überlagerung aus „Katze lebt, alle Atome noch ganz“ und „Katze tot, ein Atom zerfallen“.

Im Gegensatz zu Gedankenexperimenten mit komplizierten Systemen (wie Katzen) kann man versuchen, reale Experimente mit einfachen Systemen durchzuführen; das ist immer noch kompliziert genug. Einer Gruppe unter Leitung von David Wineland in Boulder (Colorado) gelang es 1996, das Schrödinger-Katzen-Szenario mithilfe eines einzelnen Beryllium-Ions¹¹ genau nachzustellen. Das Ion wurde mit elektromagnetischen Feldern festgehalten und konnte dabei entweder ruhen oder um die Ruheposition hin und her schwingen. Diese beiden möglichen Zustände wollen wir *R* (wie Ruhe) und *S* (wie Schwingung) nennen. Unabhängig davon konnten die Elektronen des Ions viele verschiedene Zustände einnehmen. Die Experimentatoren haben sich davon zwei ausgewählt, nennen wir sie *A* und *B*. Durch geschickte Bestrahlung mit Lasern (also ebenfalls elektromagnetischen Feldern) konnte man den „inneren“ Elektronenzustand des Atoms mit seiner Bewegung im Raum *verschränken*, also eine Überlagerung von (*A, R*) mit (*B, S*) bilden. (Wichtig: Die beiden anderen möglichen Kombinationen

¹¹Ein Ion ist ein Atom mit unterschiedlicher Anzahl von Elektronen und Protonen; hier sind es 4 Protonen im Atomkern, umgeben von nur 3 Elektronen.

(A, S) und (B, R) treten *nicht* auf.) In dieser Versuchsanordnung war der Bewegungszustand (ruhend oder schwingend) des Ions für sich allein unbestimmt, ebenso wie sein Elektronenzustand; der Gesamtzustand des Systems war aber eindeutig festgelegt.

Eine noch überzeugendere Demonstration zeigte ebenfalls 1996 eine Gruppe um Serge Haroche in Paris. Dort wurde ein Atom in eine Überlagerung von zwei unterschiedlichen angeregten Zuständen versetzt, bevor es durch eine Kammer lief, in der sich ein elektromagnetisches Feld befand. Das Atom veränderte beim Durchqueren der Kammer das elektromagnetische Feld, und zwar unterschiedlich, je nach seinem Zustand, der sich dabei aber nicht änderte. Wenn das Atom die Kammer verlassen hatte, war das Gesamtsystem aus Atom plus Feld in einem Zustand, in dem Atom und Feld miteinander verschränkt waren, aber keines von beiden *für sich* in einem bestimmten Zustand war. Diese Demonstration war besonders überzeugend, weil hier zwei physikalisch verschiedenartige und räumlich getrennte Teilsysteme miteinander verschränkt wurden. David Wineland und Serge Haroche teilten sich den Nobelpreis für Physik 2012. Fazit: Schrödingers Katze existiert tatsächlich, aber sie sieht nicht ganz so aus, wie Schrödinger sich das seinerzeit vorgestellt hat. Das freut auch die Tierschützer.

Vektoren für Katzen

Schrödinger hat sich die bemitleidenswerte Katze natürlich nicht einfach zum Vergnügen ausgedacht, sondern weil er auf einen Diskussionsbeitrag von drei Kollegen reagieren wollte: Einstein, Podolsky und Rosen, im Folgenden EPR genannt. Die drei vertraten die Meinung, dass die Quantenmechanik keine *vollständige* Theorie ist und erklärten das in einem Artikel in einer Fachzeitschrift an einem Gedankenexperiment, das wir hier in einer etwas vereinfachten Form behandeln, und in dem zwei Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ auftreten. Diese beiden Teilchen, nennen wir sie A und B , werden zu Beginn in einem ganz bestimmten Zustand präpariert, der eine Überlagerung von zwei Möglichkeiten darstellt:

$$|\Psi\rangle_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \right).$$

Es ist also klar: *Wenn* das Teilchen A im Zustand $|\uparrow\rangle$ ist, *dann* ist das Teilchen B im Zustand $|\downarrow\rangle$, und *wenn* B im Zustand $|\uparrow\rangle$ ist, *dann* ist A im Zustand $|\downarrow\rangle$. Keines der beiden Teilchen für sich ist in einem bestimmten Zustand, aber der *Gesamtzustand* beider Teilchen ist eindeutig festgelegt. Wenn eine Messung des Zustands an einem der beiden Teilchen vorgenommen wird, ist das Ergebnis nicht eindeutig, aber das Ergebnis der Messung an einem Teilchen legt das Ergebnis einer späteren Messung am anderen Teilchen fest: Wenn die Messung für das Teilchen A den Zustand $|\uparrow\rangle$ feststellt, dann bleibt vom Anfangszustand $|\Psi\rangle_{\text{EPR}}$ des Gesamtsystems nur der Anteil

$$|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$$

übrig, nach dem, was wir im Abschnitt 3.2 diskutiert haben. Dann ist aber klar, dass eine Messung am Teilchen B mit *Sicherheit* den Zustand $|\downarrow\rangle$ liefert.

Man stelle sich nun vor, dass das Teilchen A *vor der Messung*, also wenn die beiden Teilchen noch im Anfangszustand $|\Psi\rangle_{\text{EPR}}$ sind, zur Physikerin Alice geschickt wird und das Teilchen B zum Physiker Bob, wobei die beiden sehr weit voneinander entfernt sein sollen. Beide wissen nicht, was eine Messung an dem Teilchen ergeben wird, das

sie nun in ihrem Labor haben, aber sobald Alice ihr Teilchen gemessen hat, weiß sie sicher, in welchem Zustand Bobs Teilchen ist, ganz egal wie weit sie von ihm entfernt ist!

Diese Konsequenz des EPR-Gedankenexperiments bezeichnete Einstein als „spukhafte Fernwirkung“ und war nicht bereit, eine Theorie zu akzeptieren, die ein solches Verhalten erlaubt. Schrödinger benutzte das Wort *Verschränkung* für die Art, in der die beiden Teilchen miteinander verbunden sind. Der Ausdruck kommt aus dem Möbelbau und bezeichnet die Verbindung von zwei Holzstücken, bei der Zacken des einen Stücks in Schlitze des anderen Stücks greifen. Im Englischen wird dieses Phänomen der Quantenmechanik als *entanglement* bezeichnet; das kann man mit „Verwirrung“ oder „Gewirr“ übersetzen. Wer möchte, kann sich dabei eine große Schüssel frisch gekochter Spaghetti vorstellen. Um zu zeigen, wie merkwürdig diese Konsequenz der Quantenmechanik ist, erdachte Schrödinger dann das Beispiel mit der Katze. Er selbst bezeichnete die Verschränkung als *das* zentrale Merkmal, in dem sich klassische Physik und Quantenphysik unterscheiden. Weder Schrödinger noch Einstein konnten sich mit diesem Phänomen anfreunden, das sich aus der mathematischen Struktur der Quantenmechanik klar ergibt.

John Bell und die versteckten Variablen

Ein denkbarer Ausweg, mit dem sich viele zu beruhigen versuchten, war die Überlegung, dass man einfach noch nicht genau genug hingesehen habe, dass es also noch Mechanismen gebe, die „in Wirklichkeit“ den scheinbaren Zufall steuern und schon zu Anfang des Experiments festlegen, dass Alice den Zustand $|\uparrow\rangle$ messen wird und Bob dann eben den Zustand $|\downarrow\rangle$, und dass die beteiligten Physiker:innen einfach nur zu ungeschickt sind um diesen Mechanismus zu erkennen und auszumessen. Das ist die Vorstellung von sogenannten „versteckten Variablen“.

Ein nicht-quantenmechanisches Beispiel für versteckte Variable wäre etwa folgende Situation: Sie wählen zwei Personen zufällig aus einer großen Menschenmenge als Versuchspersonen aus und stellen verblüfft fest, dass beide groß, schlank und rothaarig sind und grüne Augen haben. Die versteckten Variablen wären dann die identischen Gene, denn Sie haben zwei eineiige Zwillinge erwischt...

Die Vorstellung von versteckten Variablen war geeignet, die Gemüter zu beruhigen, wenn auch niemand eine Idee hatte, was denn diese Variablen sein könnten. Die physikalische Grundlagenforschung hatte etwa 30 Jahre lang genug andere Probleme zu klären und die Fragen im Umkreis der Verschränkung galten als unwichtig für praktische Zwecke, bis in den 1960er Jahren John Bell sich dieser Sache wieder annahm. Bell nahm die Idee der versteckten Variablen ernst und untersuchte deren praktische Konsequenzen, indem er berechnete, wie bestimmte Messgrößen statistisch verteilt sind, wenn man sehr viele Messungen an Teilchenpaaren im EPR-Zustand macht. Dabei war die Annahme, dass es *irgendeine* Größe gibt, die für jedes solche EPR-Paar entscheidet, was Alice messen wird, und dass diese Größe *irgendeiner* Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt. Bell konnte dann beweisen, dass bestimmte Kombinationen von Messwerten gewisse Zahlenwerte nicht überschreiten konnten, ganz unabhängig von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der versteckten Variablen; beispielsweise kann eine bestimmte Größe maximal den Wert 2 haben. Diese Aussage bezeichnet man als *Bell'sche Ungleichung*. Wenn die Quantenmechanik aber zutrifft, dann kann dieselbe Größe bis zu $2\sqrt{2} = 2,828..$ betragen. Das ist ein deutlicher Effekt und nicht etwa nur

eine Abweichung in der vierten Nachkommastelle. Wenn die Bell'sche Ungleichung deutlich verletzt ist, also die von Bell untersuchte Größe deutlich größer als 2 ist, dann zeigt das zweierlei: Verschränkung ist ein reales Phänomen, und sie ist nicht durch versteckte Variablen zu erklären.

Als Bell seine Ideen veröffentlichte, waren die von ihm vorgeschlagenen Experimente technisch noch nicht möglich. Es dauerte einige Jahre, bis genaue Messungen möglich wurden. Bei diesen Experimenten wurden allerdings keine Paare von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ verwendet, sondern Paare von Photonen, die durch ihre Polarisierung ja auch zwei grundsätzlich verschiedene Zustände (\uparrow und \rightarrow) einnehmen können. Bei bestimmten physikalischen Prozessen entstehen Photonen auch immer paarweise und mit verschränkten Polarisierungen, ideal für diese Experimente. In den 1970er Jahren zeigten John Clauser und Mitarbeitende (USA), dass die Bell'sche Ungleichung klar verletzt ist. Es gab allerdings noch ein paar „Schlupflöcher“, durch die die Theorie der versteckten Variablen sich noch hätte „retten“ können. Diese Auswege wurden aber durch die Experimente von Alain Aspect und Mitarbeitenden (Frankreich) geschlossen, so dass das Phänomen der Verschränkung zweifelsfrei nachgewiesen ist und die Existenz von versteckten Variablen ebenso zweifelsfrei ausgeschlossen ist. Mit verschränkten Photonen kann man eine Reihe von „Kunststücken“ durchführen, die durchaus auch praktische Anwendungen haben; das haben Anton Zeilinger und Mitarbeitende (Österreich) in vielen Experimenten gezeigt. Aspect, Clauser und Zeilinger wurden gemeinsam mit dem Nobelpreis¹² für Physik im Jahr 2022 ausgezeichnet.

Kunststücke mit Verschränkung: Schlüsselverteilung

Verschränkung kann benutzt werden, um Nachrichten zu verschlüsseln; genauer gesagt, um einen Einmalschlüssel zu erstellen, der später benutzt werden kann, um wirklich verschlüsselte Nachrichten zu senden und zu empfangen.

Was ein Einmalschlüssel ist, hatten wir schon einmal im Abschnitt 6.3 gesehen: Eine Übersetzungstabelle zwischen Klartext-Buchstaben und verschlüsselten Symbolen, aus der jede Zeile nur ein einziges Mal benutzt werden darf, um eine Entschlüsselung zu verhindern. Die Konstruktion einer solchen Tabelle war möglich, indem Alice eine Anzahl von einzelnen Photonen mit zufällig gewählter Polarisierung an Bob schickte, welche Bob mit zufällig gedrehten Polarisationsfiltern messen konnte. Alice und Bob konnten danach vergleichen, für welche Photonen die Sender-Polarisierung und die Empfänger-Polarisierung übereinstimmten. In diesen Fällen waren Bobs Messergebnisse eindeutig und konnten für den Schlüssel verwendet werden, in den anderen Fällen waren sie zufällig, also nicht brauchbar. Ob die Spionin Eve mitgehört hatte, konnte festgestellt werden.

Mit Paaren von *verschränkten* Photonen kann ein etwas trickreicheres System zur Quantenschlüsselverteilung aufgebaut werden, das zusätzliche Sicherheitsmerkmale besitzt. Wieder wird die Polarisierung der Photonen benutzt, und wieder werden verschiedene Polarisationsrichtungen gemessen. Zur Erinnerung: Wenn ein Photon in x -Richtung polarisiert ist, wird es von einem in x -Richtung ausgerichteten Polarisationsfilter durchgelassen und von einem Detektor dahinter registriert. Ist das Photon dagegen in y -Richtung polarisiert, wird es definitiv nicht durchgelassen und damit auch nicht registriert. In beiden Fällen ist das Ergebnis eindeutig. Ist das Polarisationsfilter dagegen

¹²www.nobelprize.org bietet allgemein verständliche (englische) Erläuterungen zu den Nobelpreisen.

um 45° verdreht, also entlang der Winkelhalbierenden zwischen x - und y -Achse ausgerichtet, dann wird es mit 50% Wahrscheinlichkeit registriert oder auch nicht, und zwar sowohl wenn es in x -Richtung als auch wenn es in y -Richtung polarisiert war.

Alice und Bob benutzen im Abschnitt 6.3 beide entweder das „um 0° verdrehte“ (also das ursprüngliche, nicht verdrehte) Achsensystem für die Polarisation, oder das um 45° verdrehte, und zwar zufällig und unabhängig voneinander. In 50% der Fälle hatten beide das gleiche System benutzt und erhielten somit verwertbare Ergebnisse. Darauf beruhte die Quantenschlüsselverteilung mit Einzelphotonen, die wir diskutiert hatten. In dem System mit *Paaren* von Photonen wird es etwas komplizierter. Sowohl Alice als auch Bob sind hier Empfänger und messen einzelne Photonen mit Polarisationsfiltern. Alice benutzt zufällig eines von drei Achsensystemen mit Verdrehung 0° , 45° und $22,5^\circ$; Bob wählt zufällig 0° , $+22,5^\circ$ und $-22,5^\circ$.

Eine Quelle sendet Photonenpaare in einem ganz bestimmten Zustand aus, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\rightarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B - |\uparrow\rangle_A |\rightarrow\rangle_B \right).$$

Eins der Photonen geht an Alice, das andere an Bob. In der Formel bezeichnet A oder B , wem das Photon geschickt wird, die Pfeile bezeichnen die Polarisationsrichtung und das Symbol $|\ \rangle$ erinnert daran, dass wir hier über quantenmechanische Zustände reden. Dieser Zustand hat eine gewöhnungsbedürftige, aber nützliche Eigenschaft: Er „sieht für jedes Achsensystem gleich aus“, das heißt, er ist *identisch* mit dem Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\nearrow\rangle_A |\nwarrow\rangle_B - |\nwarrow\rangle_A |\nearrow\rangle_B \right).$$

Das heißt folgendes: Wenn Bob mit einem um 45° verdrehten Polarisationsfilter misst und ein Photon registriert, dann *hat* dieses Photon die Polarisation \nearrow und Alices Photon *muss* die Polarisation \nwarrow haben. Misst Bob dagegen kein Photon, dann war es offenbar in Richtung \nwarrow polarisiert und damit *muss* Alices Photon die Polarisation \nearrow haben. Das funktioniert nicht nur für den Winkel 45° , sondern für jeden beliebigen Winkel¹³. Wenn man es genau betrachtet, „entsteht“ die Information also erst, sobald Alice oder Bob ihr jeweiliges Photon gemessen haben, vorher enthält das Photonenpaar keine Information.

Nachdem Alice und Bob eine vorher vereinbarte Zahl von Photonen gemessen haben, informieren sie sich gegenseitig, welches Achsensystem sie zum Messen benutzt haben. Das können sie ruhig öffentlich tun, denn die Photonen sind ja weg und können nicht mehr gemessen werden. In den Fällen, in denen beide das gleiche Achsensystem benutzt haben, haben sie eindeutige Messergebnisse (die sie natürlich *nicht* öffentlich ausplaudern), und diese Messergebnisse bilden den Schlüssel. Da beide jeweils 3 verschiedene Achsensysteme zufällig wählen, gibt es 9 Kombinationen, von denen 2 nützlich sind (beide 0° oder beide $22,5^\circ$). Es sind also nur $2/9 = 22,22\%$ der Photonenpaare für den Schlüssel verwertbar, während es bei der Methode mit Einzelphotonen 50% waren; die zusätzliche Sicherheit der neuen Methode hat ihren Preis. Die drei Kombinationen, bei denen die beiden Achsensysteme einen Winkel von 45° bilden, liefern vollkommen zufällige Messergebnisse und helfen daher niemandem. Aus den

¹³Geübte Quantenmechaniker:innen rechnen das in ein paar Minuten nach; wir ersparen uns die Mühe hier. Wichtig ist: Das funktioniert nur mit genau diesem Zustand, mit dem Minuszeichen zwischen den beiden Anteilen.

vier übrigen Kombinationen, mit Winkeln $\pm 22,5^\circ$ oder $67,5^\circ$ kann man genau die Kombination von Messwerten bilden, die für den benutzten Zustand den Wert $2\sqrt{2}$ besitzt, der die Bell'sche Ungleichung „maximal verletzt“. Diese Messungen können zur Überprüfung der Sicherheit benutzt werden: Wenn sie einen deutlich kleineren Wert als $2\sqrt{2}$ liefern, dann hat Eve Photonen abgefangen und gefälschte Photonen weitergeleitet und so den ursprünglichen Zustand verfälscht. *Kleine* Abweichungen vom Maximalwert $2\sqrt{2}$ können allerdings auch ohne Spionage durch Ungenauigkeiten in der Übertragung oder Messfehler entstehen.

Dieses 1991 von Artur Ekert vorgeschlagene Verfahren ist inzwischen auch mehrfach praktisch getestet worden, wobei die Gruppe von Anton Zeilinger Pionierarbeit leistete, z.B. bei der Übertragung zwischen den kanarischen Inseln Teneriffa und La Palma über 144km Entfernung (2006).

Kunststücke mit Verschränkung: Verschränkungs-austausch

Um Photonen über 144km zu übertragen, braucht es hohe Berge (wegen der Krümmung der Erdoberfläche) und sehr klare Wetterbedingungen, auf die man sich aber leider nicht verlassen kann. Eine Alternative bieten Glasfaserkabel, die für die „klassische“ Datenübertragung im Internet und Telefonsystem sowieso schon vorhanden sind. Allerdings gibt es auch in Glasfasern Verluste, so dass ein Photon vielleicht gar nicht bis zum Ende des Kabels kommt. Bei der klassischen Datenübertragung ist das unproblematisch. Dort besteht jedes Signal aus sehr vielen Photonen, so dass es auf eins mehr oder weniger nicht ankommt. Wenn das Signal nach einer längeren Strecke nicht mehr viele Photonen enthält, wird es in einem Verstärker („Repeater“) gemessen und eine verstärkte Kopie wird weitergeleitet. Das ist für einzelne Photonen aber *nicht möglich*: Man kann den Zustand eines Photons (oder Qubits) nicht kopieren¹⁴, außer man weiß, dass es *entweder* im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder im Zustand $|\rightarrow\rangle$ ist; dann ist die Situation aber wieder genauso wie bei einem klassischen Bit und ein so eingeschränktes Qubit bietet keine Vorteile.

Es gibt aber die Möglichkeit, zwei Photonen (oder andere Qubits) miteinander zu verschränken, die *nicht* aus derselben Quelle stammen. Dazu benötigt man ein weiteres verschränktes Photonenpaar, dessen Verschränkung dann auf die beiden anderen Photonen übertragen werden kann. Dieser Prozess wird als **Verschränkungs-austausch (entanglement swapping)** bezeichnet. Diese Idee bietet eine Möglichkeit, „Quantenrepeater“ zu bauen, die eine Übertragung von Quantenzuständen über längere Distanzen erlauben. Die ersten Experimente zum Verschränkungs-austausch wurden 1998 in Anton Zeilingers Gruppe durchgeführt; wir erläutern hier das einfachste Beispiel.

Dazu benötigen wir etwas mathematischen Vorlauf. Wir erinnern uns, dass ein einzelnes Photon einen zweidimensionalen Zustandsraum hat, mit den Basisvektoren¹⁵ $|\rightarrow\rangle$ und $|\uparrow\rangle$. Ein allgemeiner Zustand ist dann eine Überlagerung dieser beiden Basiszustände. Wir beschäftigen uns hier mit *Paaren* von Photonen und müssen deren Zustände beschreiben können. Dazu schreiben wir z.B. $|\uparrow\rightarrow\rangle_{12}$ und meinen damit „das Photon 1 ist im Zustand $|\uparrow\rangle$ und das Photon 2 im Zustand $|\rightarrow\rangle$.“ Das Photonenpaar hat die vier Basiszustände $|\uparrow\uparrow\rangle_{12}$, $|\rightarrow\rightarrow\rangle_{12}$, $|\uparrow\rightarrow\rangle_{12}$, $|\rightarrow\uparrow\rangle_{12}$, und ein allgemeiner Zustand ist eine Überlagerung dieser vier Basiszustände.

¹⁴Häufig wird nicht vom Kopieren, sondern vom Klonen eines Qubits gesprochen, und die Unmöglichkeit eine Kopie herzustellen, wird *no-cloning-Theorem* genannt.

¹⁵Wer nicht mehr weiß, was das war: Bitte im Abschnitt 5.1 nachlesen.

Für unser Beispiel ist es allerdings zweckmäßiger, einen anderen Satz von vier Basiszuständen zu betrachten, nämlich die beiden Zustände

$$| = \pm \rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \rightarrow \rightarrow \rangle_{12} \pm | \uparrow \uparrow \rangle_{12} \right),$$

in denen die Zustände der beiden Photonen *gleich* ($=$) sind, und die beiden Zustände

$$| \neq \pm \rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \rightarrow \uparrow \rangle_{12} \pm | \uparrow \rightarrow \rangle_{12} \right),$$

in denen die Zustände der beiden Photonen *verschieden* (\neq) sind. Bei der Diskussion des EPR-Experiments und der Bell'schen Ungleichung hatten wir den Zustand $| \neq + \rangle$, für die Situation mit zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen statt zwei Photonen schon einmal kennengelernt. Auch den Zustand $| \neq - \rangle$ haben wir schon bei der Quantenschlüsselverteilung mit Photonenpaaren benutzt. Diese vier Zustände werden oft **Bell-Zustände** oder auch EPR-Zustände genannt; eine Apparatur, die solche Paare erzeugen kann, heißt „EPR-Quelle“.

Für den Verschränkungs austausch benötigen wir nun zwei verschränkte Photonenpaare, (1,2) und (3,4), beide im Zustand $| \neq - \rangle$. Diese Paare werden von zwei EPR-Quellen erzeugt. Alice und Bob sind sehr weit voneinander entfernt; zwischen Ihnen steht der „Vermittler“ Charlie. Eine EPR-Quelle steht zwischen Alice und Charlie, die zweite zwischen Charlie und Bob. Photon 1 wird an Alice gesendet, Photon 2 und 3 gehen an Charlie, Photon 4 an Bob.

Wer ist nun mit wem verschränkt? Nach wie vor sind zwar 1 und 2 sowie 3 und 4 miteinander verschränkt, so dass z.B. eine Messung an 1 einen Einfluss auf 2 hat, aber Messungen an 1 oder 2 haben keinerlei Einfluss auf den Zustand von 3 oder 4; es gibt also keine Verschränkung *zwischen den beiden Paaren*. Das ändert sich aber, wenn Charlie eine bestimmte Art von Messung an den *beiden* Photonen vornimmt, die bei ihm eintreffen. Diese Messung erzwingt eine Verschränkung zwischen den Photonen 2 und 3 (die bei der Messung vernichtet werden) und damit zwischen den beiden Photonen 1, bei Alice, und 4, bei Bob, die zuvor nichts miteinander zu tun hatten.

Charlie hat ein Messgerät für Photonenpaare, das feststellen kann, in welchem der vier Bell-Zustände $| = \pm \rangle_{23}$ und $| \neq \pm \rangle_{23}$ das Photonenpaar ist, das er empfängt. Das Paar (1,4), das Alice und Bob teilen, ist nach Charlies Messung *in genau dem Zustand, den Charlie an seinem Paar (2,3) gemessen hat*. Wenn Charlie Alice und Bob mitteilt, was er gemessen hat, wissen die beiden, welchen der vier Bell-Zustände sie miteinander teilen.

Dass die Zustände der beiden Paare (1,4) und (2,3) (letzteres inzwischen nicht mehr vorhanden) *gleich* sind, ist natürlich eine verblüffende Aussage, die man entweder einfach glauben kann oder, viel besser, beweisen, also nachrechnen. Wem das lästig ist, der kann die folgende Rechnung (etwa eine Seite) einfach überspringen. Wer durchhält, hat immerhin ein kleines Stück von einer Arbeit nachvollzogen, die mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde.

Wie schon gesagt, starten wir mit den Photonenpaaren (1,2) und (3,4), beide im Zustand $| \neq - \rangle$ und schreiben diesen Zustand etwas ausführlicher, indem wir die Klammern

ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} |\neq -\rangle_{12} |\neq -\rangle_{34} &= \frac{1}{2} \left(|\rightarrow\uparrow\rangle_{12} - |\uparrow\rightarrow\rangle_{12} \right) \left(|\rightarrow\uparrow\rangle_{34} - |\uparrow\rightarrow\rangle_{34} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[|\rightarrow\uparrow\rangle_{12} |\rightarrow\uparrow\rangle_{34} - |\rightarrow\uparrow\rangle_{12} |\uparrow\rightarrow\rangle_{34} - |\uparrow\rightarrow\rangle_{12} |\rightarrow\uparrow\rangle_{34} + |\uparrow\rightarrow\rangle_{12} |\uparrow\rightarrow\rangle_{34} \right]. \end{aligned}$$

Nun schreiben wir den letzten Ausdruck so um, dass die beiden Photonen bei Charlie zu einem Paar zusammengefasst werden und die beiden anderen (bei Alice und Bob) zu einem zweiten Paar. Hier wird nur etwas umsortiert; physikalisch oder mathematisch ändert sich *nichts*:

$$\begin{aligned} |\neq -\rangle_{12} |\neq -\rangle_{34} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[|\rightarrow\uparrow\rangle_{14} |\uparrow\rightarrow\rangle_{23} - |\rightarrow\rightarrow\rangle_{14} |\uparrow\uparrow\rangle_{23} - |\uparrow\uparrow\rangle_{14} |\rightarrow\rightarrow\rangle_{23} + |\uparrow\rightarrow\rangle_{14} |\rightarrow\uparrow\rangle_{23} \right]. \end{aligned}$$

Die Aussage, die wir beweisen wollten, war folgende: Wenn Charlie durch seine Messung an seinem Photonenpaar (2,3) einen der vier Bell-Zustände erzwingt, dann ist das Photonenpaar (1,4) ebenfalls in diesem Bell-Zustand. Es ist also sinnvoll, sich die Zustände anzuschauen, in denen die beiden Photonenpaare im gleichen Bell-Zustand sind, und zu überprüfen, ob sich etwas ergibt, was Ähnlichkeit mit dem Zustand hat, den wir soeben konstruiert haben. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} |\neq \pm\rangle_{14} |\neq \pm\rangle_{23} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(|\rightarrow\uparrow\rangle_{14} \pm |\uparrow\rightarrow\rangle_{14} \right) \left(|\rightarrow\uparrow\rangle_{23} \pm |\uparrow\rightarrow\rangle_{23} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[|\rightarrow\uparrow\rangle_{14} |\rightarrow\uparrow\rangle_{23} \pm |\rightarrow\uparrow\rangle_{14} |\uparrow\rightarrow\rangle_{23} \pm |\uparrow\rightarrow\rangle_{14} |\rightarrow\uparrow\rangle_{23} + |\uparrow\rightarrow\rangle_{14} |\uparrow\rightarrow\rangle_{23} \right]. \end{aligned}$$

Die beiden Terme mit dem \pm -Vorzeichen sehen wir auch in unserem umgeschriebenen Anfangszustand $|\neq -\rangle_{12} |\neq -\rangle_{34}$. Wir subtrahieren die beiden gerade berechneten Zustände voneinander, so dass nur die Terme mit dem \pm -Vorzeichen übrig bleiben und halten fest:

$$|\neq +\rangle_{14} |\neq +\rangle_{23} - |\neq -\rangle_{14} |\neq -\rangle_{23} = |\rightarrow\uparrow\rangle_{14} |\uparrow\rightarrow\rangle_{23} + |\uparrow\rightarrow\rangle_{14} |\rightarrow\uparrow\rangle_{23}.$$

Damit haben wir schon einmal eine Hälfte des Anfangszustands überprüft; die „andere Hälfte“ muss etwas mit den Bell-Zuständen zu tun haben, in denen die zwei Photonen jeweils gleich polarisiert sind; wir schreiben also

$$\begin{aligned} | = \pm\rangle_{14} | = \pm\rangle_{23} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(|\rightarrow\rightarrow\rangle_{14} \pm |\uparrow\uparrow\rangle_{14} \right) \left(|\rightarrow\rightarrow\rangle_{23} \pm |\uparrow\uparrow\rangle_{23} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[|\rightarrow\rightarrow\rangle_{14} |\rightarrow\rightarrow\rangle_{23} \pm |\rightarrow\rightarrow\rangle_{14} |\uparrow\uparrow\rangle_{23} \pm |\uparrow\uparrow\rangle_{14} |\rightarrow\rightarrow\rangle_{23} + |\uparrow\uparrow\rangle_{14} |\uparrow\uparrow\rangle_{23} \right]. \end{aligned}$$

Wieder sind es die beiden Terme mit dem \pm -Vorzeichen, die wir auch im Anfangszustand sehen, und zwar beide mit dem Vorzeichen „-“. Also haben wir

$$| = -\rangle_{14} | = -\rangle_{23} - | = +\rangle_{14} | = +\rangle_{23} = -|\rightarrow\rightarrow\rangle_{14} |\uparrow\uparrow\rangle_{23} - |\uparrow\uparrow\rangle_{14} |\rightarrow\rightarrow\rangle_{23}.$$

Damit sind wir fertig: Der Anfangszustand unserer zwei Photonenpaare lässt sich insgesamt so schreiben:

$$|\neq -\rangle_{12}|\neq -\rangle_{34} = \frac{1}{2} \left[|\neq +\rangle_{14}|\neq +\rangle_{23} - |\neq -\rangle_{14}|\neq -\rangle_{23} + | = -\rangle_{14}| = -\rangle_{23} - | = +\rangle_{14}| = +\rangle_{23} \right].$$

Der Ausdruck in den großen eckigen Klammern ist also tatsächlich eine Überlagerung von Zuständen, in denen die beiden Photonenpaare (1,4) und (2,3) jeweils im gleichen Bell-Zustand sind. Wenn nun Charlie misst, in *welchem* der vier möglichen Bell-Zustände sein Paar (2,3) ist, wird er ein Ergebnis erhalten; sagen wir, er misst $| = +\rangle_{23}$. Dann kollabiert der Zustand des Gesamtsystems auf $| = +\rangle_{14}| = +\rangle_{23}$, und Alice und Bob teilen sich das Photonenpaar (1,4) im Zustand $| = +\rangle_{14}$. Damit sie das erfahren, muss Charlie ihnen allerdings das Ergebnis seiner Messung mitteilen.

Auf diese Weise kann man also ein verschränktes Paar über eine größere Entfernung verteilen als die Reichweite einer einzelnen EPR-Quelle, aber man benötigt dazu eine zweite EPR-Quelle und Charlie als Zwischenstation. Man kann sich vorstellen, das Verfahren mit einem geeigneten Netzwerk von weiteren EPR-Quellen und Zwischenstationen fortzusetzen und so ein verschränktes Paar über noch größere Entfernungen zu verteilen. Auch können andere Anfangszustände als in unserem Beispiel verwendet werden; dann sind eventuell zusätzliche Schritte im Verfahren notwendig.

Zur abhörsicheren Schlüsselverteilung erscheint das Verfahren allerdings auf den ersten Blick nicht geeignet, denn Charlie (oder einer der vielen Charlies bei größerer Entfernung) könnte ein Spion sein, und außerdem übermittelt Charlie an Alice und Bob Informationen, die eigentlich geheim bleiben sollten, nämlich welchen Bell-Zustand sich die beiden teilen. Wenn diese Information abgehört wird, hat die ganze Aktion keinen Sinn.

Kunststücke mit Verschränkung: Teleportation

Beim Stichwort „Teleportation“ denkt wahrscheinlich jeder an Szenen aus Science-Fiction Filmen, in denen jemand in eine Glaskabine steigt, langsam „verblasst“, und im nächsten Moment in einem anderen Sonnensystem wieder auftaucht. Wir sind hier bescheidener und verstehen unter Teleportation folgendes: Der quantenmechanische Zustand eines einzelnen Qubits wird auf ein anderes Qubit übertragen¹⁶, ohne dass eines der beiden Qubits selbst bewegt wird.

Wenn wir verstanden haben, wie das geht, können wir überlegen, um wieviel schwieriger es ist, das Science-Fiction-Szenario Wirklichkeit werden zu lassen. Die Teleportation einzelner Qubits wurde 1993 erstmalig theoretisch vorgeschlagen und 1997 experimentell bestätigt, u.a. durch Anton Zeilingers Arbeitsgruppe.

Wieder treten unsere üblichen Verdächtigen Alice und Bob auf. Alice hat ein Qubit in einem Quantenzustand¹⁷

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

¹⁶Nicht *kopiert*, das ist nach dem no-cloning-Theorem nicht möglich.

¹⁷Woher Alice diesen Zustand hat, soll uns hier nicht interessieren. Wichtig ist, dass Alice den Zustand nicht *kennt*, etwa weil sie ihn selbst hergestellt hat, denn sonst könnte sie ja Bob einfach die Zahlen α und β als „Bauanleitung“ mitteilen.

und außerdem haben sich Alice und Bob ein Qubit-Paar in einem der Bell-Zustände besorgt, wobei jede:r der beiden eins der beiden Qubits besitzt:

$$| = + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |11\rangle \right).$$

Ähnlich wie zu Beginn des Abschnitts 6.3 identifizieren wir hier die beiden Basiszustände für ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$ mit den beiden Basiszuständen eines Qubits oder den Basiszuständen in der xy -Ebene:

$$|0\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |1\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bevor es jetzt wieder etwas mathematisch wird, kommt hier eine Beschreibung der Teleportation *ohne* Mathematik, in drei einfachen Schritten:

- 1) Alice verschränkt ihre beiden Qubits durch bestimmte mathematische Operationen, wobei auch Bobs Qubit beeinflusst wird.
- 2) Alice führt eine Messung an ihren beiden Qubits durch, wodurch der Gesamtzustand aller drei Qubits „kollabiert“, also keine Superposition aus mehreren Möglichkeiten mehr ist, sondern ein eindeutiger einzelner Zustand, der mit Alices Ausgangszustand $|\Psi\rangle$ zusammenhängt, aber Bob weiß noch nicht genau, wie.
- 3) Alice teilt Bob das Ergebnis ihrer Messung mit; diese Information braucht Bob, um den Zustand $|\Psi\rangle$ bei sich *exakt* zu reproduzieren.

Wer es nicht genauer wissen möchte, kann jetzt aufhören zu lesen.

Wir nummerieren die Qubits durch: Der Zustand $|\Psi\rangle$, der teleportiert werden soll, ist in Qubit 1, Qubit 2 hat Alice und Qubit 3 hat Bob; 2 und 3 sind im Bell-Zustand $| = + \rangle$. Um zu verfolgen was geschieht, schreiben wir den Anfangszustand in voller Schönheit aus:

$$|\Psi\rangle | = + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha |0\rangle \left(|00\rangle + |11\rangle \right) + \beta |1\rangle \left(|00\rangle + |11\rangle \right) \right].$$

Als erstes führt Alice mit ihren beiden Qubits eine Operation aus, die man üblicherweise mit CNOT(1,2) bezeichnet; das heißt „controlled not“ (bedingte Verneinung). Diese Operation wirkt auf das Qubit 2 in Abhängigkeit vom Zustand des Qubits 1: Wenn 1 im Zustand $|0\rangle$ ist, bleibt 2 unverändert; ist aber 1 im Zustand $|1\rangle$, wird 2 umgekehrt, also von $|0\rangle$ nach $|1\rangle$ gebracht, und umgekehrt. Das liefert folgendes Ergebnis:

$$\text{CNOT}(1, 2)|\Psi\rangle | = + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha |0\rangle \left(|00\rangle + |11\rangle \right) + \beta |1\rangle \left(|10\rangle + |01\rangle \right) \right].$$

Alices nächste Operation haben wir im Abschnitt 6.3 bereits kurz kennengelernt, aber wir wiederholen noch einmal die einzelnen Bestandteile. Die Operation \hat{X} ist die Verneinung; sie verwandelt $|\uparrow\rangle$ in $|\downarrow\rangle$ und umgekehrt, bzw. $|0\rangle$ in $|1\rangle$ und umgekehrt. Die Operation \hat{Z} versieht $|1\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ mit einem Vorzeichen und tut ansonsten nichts. Wir kombinieren die beiden Operationen und sehen, dass folgendes passiert:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + \hat{Z} \right) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |0\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + \hat{Z} \right) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).$$

Diese Operation wendet Alice nun auf das Qubit 1 an, was durch eine angehängte

tiefgestellte „1“ angezeigt wird:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X}_1 + \hat{Z}_1) \text{CNOT}(1,2)|\Psi\rangle| = + \rangle = \\ & \frac{1}{2} \left[\alpha(|0\rangle + |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle) (|10\rangle + |01\rangle) \right] = \\ & \frac{1}{2} [\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle]. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden alle Klammern ausmultipliziert und alle drei Qubits zusammengefasst, natürlich in der Reihenfolge 1,2,3. Alices Qubits 1 und 2 tauchen in allen vier möglichen Kombinationen auf: 00, 01, 10 und 11, und zwar jeweils einmal mit einem α und einmal mit einem β . Das kann wieder anders zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X}_1 + \hat{Z}_1) \text{CNOT}(1,2)|\Psi\rangle| = + \rangle = \\ & \frac{1}{2} [|00\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]. \end{aligned}$$

Nun kann Alice den zweiten Schritt durchführen, und ihre beiden Qubits messen. Wenn sie die Werte (0,0) misst, kollabiert die Überlagerung von vier Zuständen und es bleibt nur der erste Anteil übrig. Bob hat dann den Zustand $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\Psi\rangle$, genau den Zustand mit dem Alice begonnen hat. Der Zustand ist zu Bob teleportiert worden, und Alice hat nur noch den eher uninteressanten Zustand $|00\rangle$ in der Hand.

Wenn Alice die Kombination (0,1) misst, hat Bob den Zustand $|\Psi\rangle$ mit vertauschten Rollen von $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Das lässt sich leicht reparieren, indem Bob auf sein Qubit die Operation \hat{X} anwendet. Beim Messergebnis (1,0) hat in Bobs Zustand der Anteil $|1\rangle$ das falsche Vorzeichen, was durch ein \hat{Z} zu reparieren ist. Beim letzten möglichen Ergebnis (1,1) muss Bob zuerst \hat{X} anwenden und dann mit \hat{Z} das Vorzeichen korrigieren – und zwar in genau dieser Reihenfolge.

Zusammengefasst: Alice übermittelt an Bob die beiden Messergebnisse, also (klassische) Bits. Wenn das zweite Bit den Wert 1 hat, muss Bob \hat{X} anwenden. Danach schaut er das erste Bit an, und wenn das den Wert 1 hat, wendet er \hat{Z} an. Am Ende hat er exakt den Zustand $|\Psi\rangle$ auf sein Bit übertragen.

„Beam me up, Scotty“?

Es ist also tatsächlich möglich, und vergleichsweise einfach, wenn man über ein gut ausgestattetes Labor verfügt, den Zustand *eines einzigen* Qubits an einem Ort auf den Zustand eines anderen Qubits an einem anderen Ort zu übertragen. Dazu muss allerdings ein Qubit-Paar in einem Bell-Zustand vorliegen, und zwar je ein Qubit am Start und am Ziel der Teleportation. Nachrichtenübertragung zwischen den beiden Orten muss möglich sein, und quantenmechanische Operationen und Messungen müssen möglich sein. All das konnte in Experimenten überprüft werden.

Kann nun also Captain Kirk seinem Chefsingenieur Scotty auf der *Enterprise* einfach „Beam me up, Scotty!“ zurufen und schon geht’s auf zum Andromedanebel? – Dazu müsste irgendjemand für jedes Qubit von Kirk ein Paar von Qubits in einem Bell-Zustand erzeugt haben und je eines davon auf der *Enterprise* und im Andromedanebel

bereitgelegt haben. (Besser auch noch einmal diese Anzahl von Qubit-Paaren für den Rückweg!)

Allerdings besteht Kirk nicht aus Qubits, die genau zwei verschiedene Zustände besitzen, sondern aus Atomen, und bereits ein einzelnes Atom ohne Wechselwirkung mit anderen Atomen hat *unendlich* viele gebundene (also stabile) Zustände. Noch gar nicht berücksichtigt haben wir die Tatsache, dass Kirks Atome in einer sehr fein abgestimmten Weise miteinander wechselwirken müssen, damit er sich wohlfühlt und Heldentaten vollbringen kann. Die schiere Anzahl von Atomen bzw Molekülen macht es nicht einfacher: Ein Mann von 75kg Masse enthält etwa 45kg Wasser, das sind allein grob $1,5 \cdot 10^{27}$ Wassermoleküle, und von den übrigen Bestandteilen eines menschlichen Körpers sprechen wir erst gar nicht.

Das sieht alles eher schwierig aus...

Anhang A

Glossar

Amplitude

Die **Amplitude** ist die maximale Auslenkung einer Welle, also z.B. bei einer Wasserwelle die Höhe des Wellenbergs über der ruhigen Wasseroberfläche. Außer der Amplitude ist auch die **Phase** einer Welle wichtig, die bestimmt, wo z.B. genau die Wellenberge liegen.

Bei Überlagerungen von Wellen sind sowohl die Amplituden als auch die Phasen der Teilwellen wichtig, Stichwort Interferenz.

Bei einer Überlagerung von mehreren quantenmechanischen Wellenfunktionen spricht man ebenfalls von den Amplituden der verschiedenen Wellenfunktionen und meint damit die jeweiligen (als komplexe Zahlen ausgedrückten) Anteile.

Bewegungsgleichungen

In der Physik sind Bewegungsgleichungen immer Differenzialgleichungen, d.h. sie geben zu einem bestimmten Zeitpunkt t an, wie sich der Zustand zeitlich ändert (mathematisch: Ableitungen nach der Zeit). Daraus kann der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt berechnet werden.

Für ein *klassisches* Teilchen ist die Bewegungsgleichung durch die Gesetze von Newton gegeben, z.B. in der Form „Kraft = Masse mal Beschleunigung“. Wenn die Kraft bekannt ist, kann aus der Beschleunigung berechnet werden, wie sich die Geschwindigkeit ändert, und daraus dann, wie sich der Ort ändert. Dann kann man die Bahn des Teilchens im Raum verfolgen, z.B. für einen Satelliten, der um die Erde kreist.

Die Bewegungsgleichung für ein *quantenmechanisches* Teilchen ist die Schrödingergleichung, eine Differenzialgleichung für die Wellenfunktion. Wegen der heisenbergschen Unschärferelation gibt es für ein quantenmechanisches Teilchen (z.B. ein Elektron in einem Atom) den Begriff der Bahn nicht.

De-Broglie-Wellenlänge

Ein Teilchen mit Masse m , das sich mit Geschwindigkeit v bewegt, hat den Impuls $p = mv$. In der Quantenmechanik hat dieses Teilchen dann eine Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

wobei h die Planck-Konstante ist. Die Wellenlänge ist also um so kürzer, je schwerer das Teilchen ist und je schneller es sich bewegt.

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = e^x,$$

wobei $e = 2,71828\dots$ die Eulersche Zahl ist. Man sieht, dass diese Funktion sehr stark anwächst, wenn x größer wird: $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^2 = e \cdot e = 7,389$, ... $e^{10} = 22026,5$, $e^{20} = 485.165.195$. Jedesmal, wenn x um 1 wächst, wird e^x „ver-e-facht“. Das nennt man exponentiellen *Anstieg*.

Einen exponentiellen *Abfall* zeigt die Funktion $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, die jedesmal, wenn x um 1 wächst, um einen Faktor $\frac{1}{e} = 0,3679$ kleiner wird: $e^{-10} = 0,000045$.

Ein Beispiel für exponentiellen Abfall (in der Zeit t) liefert der radioaktive Zerfall. Die Anzahl $N(t)$ der zur Zeit t vorhandenen radioaktiven Teilchen ist

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau},$$

wobei N_0 die Anzahl zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist. τ (griechischer Buchstabe tau) ist die mittlere „Lebensdauer“ eines radioaktiven Teilchens bis zum Zerfall. $t_{1/2} = 0.6931\tau$ ist die Halbwertszeit, nach der noch die Hälfte der am Anfang vorhandenen Teilchen da ist. Nach zehn Halbwertszeiten ist nur noch $1/1024$ der radioaktiven Teilchen da.

Impuls

Der Impuls p eines klassischen Teilchens ist einfach das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit v :

$$p = mv.$$

Der Impuls eines kräftefreien quantenmechanischen Teilchens hängt mit der Wellenlänge λ der Wellenfunktion zusammen:

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

dabei ist h die Planck-Konstante.

Wenn Kräfte auf das quantenmechanische Teilchen wirken, ist p etwas komplizierter zu berechnen.

Auch ein Photon (Lichtquant) hat Impuls; der ist durch die Wellenlänge λ des Lichts gegeben:

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Der Impuls des Photons hängt mit dessen Energie E über

$$p = \frac{E}{c}$$

zusammen. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

Kinetische und potentielle Energie, klassisch

Kinetische Energie ist die Energie der Bewegung. Wenn ein Teilchen der Masse m sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat es die Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Wenn das Teilchen seine Energie beispielsweise an eine Feder abgibt, die durch den Aufprall gespannt wird, dann ist die Energie als potentielle Energie E_{pot} in der Feder gespeichert. Die Gesamtenergie, also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, ist konstant. Dieser Satz von der Erhaltung der Energie (auch kurz: Energiesatz) ist eines der wichtigsten Prinzipien der Physik.

Häufig hängt E_{pot} von einer Ortskoordinate x ab, in unserem Beispiel etwa von dem Ort, an dem das Teilchen von der Feder gestoppt wird. Je schneller es am Anfang war, desto weiter wird die Feder zusammengedrückt und desto größer ist die potentielle Energie. In der Physik bezeichnet man eine solche vom Ort x abhängige potentielle Energie meist kurz mit $V(x)$ und spricht auch abkürzend vom Potential. (Eine etwas missverständliche Bezeichnung, da man in der Elektrizitätslehre die potentielle Energie *pro Ladung* als elektrisches Potential bezeichnet.)

Die kinetische Energie wird häufig durch den Impuls $p = mv$ ausgedrückt; dann hat man die Beziehung

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}.$$

Diese Beziehung gilt allerdings nur, wenn das Teilchen sich mit Geschwindigkeiten bewegt, die sehr klein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit c sind. Ist das nicht der Fall, muss man die Relativitätstheorie bemühen und erhält

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2.$$

In diesem Buch wird die Relativitätstheorie aber nur an einer einzigen Stelle wichtig, und zwar beim Compton-Effekt.

Kinetische und potentielle Energie, quantenmechanisch

Auch in der Quantenphysik kann man kinetische und potentielle Energie definieren, und genau wie in der klassischen Physik ist die Gesamtenergie als Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant; der Satz von der Erhaltung der Energie gilt auch in der Quantenphysik.

Die potentielle Energie ist wie im klassischen Fall durch eine von einer Ortskoordinate abhängige Funktion $V(x)$ festgelegt. (Wir betrachten der Einfachheit halber nur eine Bewegung in einer Dimension.) Der Wert der potentiellen Energie eines quantenmechanischen Teilchens in einem bestimmten Zustand hängt aber auch von der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ ab, die diesen Zustand beschreibt. Man bildet dazu den Mittelwert (über die Koordinate x) der klassischen potentiellen Energiefunktion $V(x)$, und als Gewichtung beim Mitteln wird die durch $|\Psi(x, t)|^2$ gegebene Aufenthaltswahrscheinlichkeit benutzt.

Die kinetische Energie eines Teilchens im Zustand $\Psi(x, t)$ hängt davon ab, wie stark sich $\Psi(x, t)$ räumlich ändert (also von der Ableitung von $\Psi(x, t)$ nach x). Diese Größe hängt natürlich von x ab und muss auch wieder über den ganzen Raumbereich gemittelt werden, in dem sich das Teilchen aufhält.

Speziell für ein *freies* Teilchen mit Impuls p und Masse m ist die Wellenfunktion eine Welle mit einer bestimmten (De Broglie-) Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$. (h ist die Planck-Konstante.) Je kürzer die Wellenlänge ist, desto größer ist der Impuls p und damit die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$. Je kürzer die Wellenlänge ist, desto stärker ist auch die räumliche Änderung der Wellenfunktion und man sieht den Zusammenhang zur allgemeineren Definition der kinetischen Energie.

Um die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ zu bestimmen, muss man die Schrödinger-Gleichung lösen. Um aber ohne viel Rechnen ein grobes anschauliches Bild zu bekommen, kann man sich stattdessen auch überlegen, wie die Wellenfunktion aussehen muss, damit die kinetische und die potentielle Energie sich überall im Raum zum korrekten Wert der Gesamtenergie addieren.

Klassische Physik

Als klassisch bezeichnet man den Wissensstand der Physik etwa um 1900: Die Mechanik gehorcht den von Newton gefundenen Prinzipien, erweitert durch die spezielle Relativitätstheorie von Einstein. Elektrische und magnetische Phänomene werden durch Maxwells Elektrodynamik vollständig beschrieben. Die klassische Physik beschreibt auch heute noch sehr gut alle im Alltag und in weiten Bereichen der Technik auftretenden physikalischen Effekte. Einige wenige Phänomene waren um 1900 durch die klassische Phy-

sik *nicht* zu erklären, etwa die Spektrallinien der chemischen Elemente und das Spektrum der Wärmestrahlung. Erst die Entwicklung der Quantenmechanik in den 1920er Jahren lieferte die Theorie dieser „nichtklassischen“ Phänomene.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** z wird aus zwei reellen Zahlen x und y nach der Vorschrift

$$z = x + iy$$

gebildet. Dabei ist i die **imaginäre Einheit** mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

Man nennt x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z . Komplexe Zahlen kann man in einer Ebene mit x und y als Koordinaten in der üblichen Art und Weise darstellen (Gauß'sche Zahlenebene). Die Größe

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

bezeichnet man als **Betragsquadrat** von z . Der Betrag $|z|$ der Zahl z gibt dann den Abstand zwischen z und dem Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene an.

Zum Warmwerden berechne man einfach einmal das Produkt von $3 + 4i$ und $3 - 4i$. Tipp: Das Ergebnis ist reell und eine Quadratzahl.

Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Der Zustand eines Teilchens in einer Dimension zur Zeit t ist durch die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ *vollständig* bestimmt. Trotzdem ist das Ergebnis einer **Einzelmessung** (also einer einmaligen Messung) des Orts x (oder einer anderen Messgröße) nicht vorhersagbar. Wenn man aber sehr oft hintereinander folgende Operationen durchführt:

1. Stelle den Zustand $\Psi(x, t)$ her,
2. Messe den Ort x und
3. Registriere das Ergebnis der Ortsmessung,

dann stellt sich allmählich die Verteilung der Messergebnisse des Orts ein, die durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ gegeben ist.

Im Unterschied zu einer Einzelmessung ist das eine statistische Messung; Experten sprechen oft von **Ensemblemessungen**. Wichtig ist, dass man das System immer wieder neu *präpariert*, also den Ausgangszustand $\Psi(x, t)$ herstellt. Alternativ kann man sich auch eine große Anzahl von Teilchen

vorstellen, die alle im gewünschten Zustand $\Psi(x, t)$ sind (ein Ensemble von Teilchen), und an jedem Teilchen wird ein einziges Mal gemessen.

Nach einer Einzelmessung ist der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* $\Psi(x, t)$, sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat.

Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.

Messungen verändern Zustände

Wenn ein Teilchen in einem Zustand Ψ ist und an diesem Teilchen eine (Einzel-) Messung durchgeführt wird, dann ist nach der Messung der Zustand des Teilchens in der Regel *nicht mehr* Ψ , sondern ein anderer, abhängig davon, welche physikalische Größe gemessen wurde, und welchen Wert diese Messung ergeben hat. *Eine Messung verändert den Zustand eines Systems.*

Ein einfaches Beispiel ist eine Messung, die feststellt, „auf welcher Seite“ ein Teilchen ist, also bei $x > 0$ („rechts“) oder bei $x \leq 0$ („links“). Vor der Messung, im Zustand Ψ , hält sich das Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit links und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit rechts auf. (Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten beträgt natürlich Eins.) Die Messung versetzt das Teilchen *entweder* in einen Zustand Ψ_{rechts} *oder* in einen Zustand Ψ_{links} . Wenn der Messwert „rechts“ gemessen wurde und man führt unmittelbar nach der ersten Messung eine zweite durch (ohne ansonsten irgendwie auf das Teilchen einzuwirken), dann wird das Ergebnis mit Sicherheit wieder „rechts“ sein.

Die erste Messung hat hier den Zustand festgelegt. Man sagt, der anfängliche Zustand Ψ sei zum Zustand Ψ_{rechts} **kollabiert** oder auf diesen Zustand **reduziert** worden. Die Zustände Ψ_{rechts} und Ψ_{links} bezeichnet man als **Eigenzustände** der Messgröße „Seite“. Ein Eigenzustand ist ein Zustand, in dem die Messung der zugehörigen Größe mit Sicherheit einen ganz bestimmten Wert (den **Eigenwert**) liefert.

Nach der Messung entwickelt sich der Zustand des Teilchens gemäß der Schrödingergleichung weiter, und damit kann sich das Teilchen möglicherweise auch wieder nach links bewegen, so dass die durch die Messung festgelegte Eigenzustands-Eigenschaft wieder verloren geht. Darum erhält man auch nur dann bei den beiden geschilderten Messungen gleiche Ergebnisse, wenn sie *unmittelbar* nacheinander ausgeführt werden.

Mittelwerte und Schwankungen

Mittelwerte sind das, was man umgangssprachlich meist als „Durchschnitt“ oder „Durchschnittswert“ bezeichnet, und jeder weiß intuitiv, wie man etwa die Durchschnittsnote einer Klausur bestimmt. Das mittlere Alter der 20 Personen in einem Physik-Leistungskurs könnte z.B. 16,8 Jahre betragen,

genauso wie möglicherweise das mittlere Alter von 20 Menschen, die an einem Samstagvormittag nacheinander ein Kaufhaus betreten. Wenn wir das Alter der ersten Person A_1 nennen, das der zweiten Person A_2 usw., dann ist der **Mittelwert** des Alters für 20 Personen einfach

$$\langle A \rangle = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}.$$

Die spitzen Klammern $\langle \dots \rangle$ sind eine übliche Art, Mittelwerte zu bezeichnen.

Die beiden Personengruppen (Physik-LK und Kaufhaus) werden sicher unterschiedliche Altersverteilungen haben, auch wenn $\langle A \rangle$ für beide Gruppen gleich ist. Im Kaufhaus werden auch ältere Leute und Kleinkinder sein, also Personen mit großen Abweichungen vom Mittelwert. Eine Größe, die die Stärke der Abweichungen vom Mittelwert beschreibt, ist die **Varianz** (die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert):

$$\text{Var}(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

(Man verwendet das Quadrat der Abweichung vom Mittelwert, damit sich nicht die Abweichungen nach oben und unten gegenseitig aufheben. Die beiden angegebenen Formen der Varianz sind äquivalent. Das leuchtet nicht unmittelbar ein, lässt sich aber nachrechnen.)

Um die Abweichungen sinnvoll mit dem Mittelwert des Alters vergleichen zu können, verwendet man die Wurzel aus der Varianz; das ist die **Standardabweichung** $\sigma(A)$

$$\sigma(A) = \sqrt{\text{Var}(A)} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Die Standardabweichung $\sigma(A)$ (σ : griechischer Buchstabe sigma) ist das, was man meint, wenn man sagt, das Durchschnittsalter des Physik-LKs sei $16,8 \pm 0,8$ Jahre.

Wenn in der Physik von **Unschärfe** gesprochen wird, ist immer die Standardabweichung gemeint. Oft bezeichnet man die Unschärfe mit dem großen griechischen Delta; Δx bedeutet dann die Standardabweichung des Orts x : $\Delta x = \sigma(x)$, und ähnlich für den Impuls p und andere Größen.

Operator

Operatoren beschreiben mathematisch Manipulationen an einem quantenmechanischen Zustand, beispielsweise im Zusammenhang mit Messungen einer physikalischen Größe. Weil Zustände verschiedene mathematische Darstellungen erlauben, können auch Operatoren in unterschiedlichen Gestalten auftreten. Wenn ein Zustand als Wellenfunktion $\Psi(x)$ geschrieben wird, kann ein Operator zum Beispiel eine Ableitung nach der Variablen x sein, oder die Multiplikation mit einer anderen Funktion $f(x)$. Wenn ein Zustand als Vektor dargestellt wird, sind die Operatoren Matrizen. Näheres zu Vektoren und Matrizen findet sich im Abschnitt 5.1.

Phasenbeziehung, Phasendifferenz

Zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge λ können verschiedene Amplituden haben und sie können zueinander verschoben sein, so dass die Wellenberge an verschiedenen Positionen sind. Diese Verschiebung drückt man aus mathematischen Gründen als Winkel aus. Eine halbe Wellenlänge entspricht einem Winkel von 180° . Diesen Winkel nennt man die **Phasendifferenz**, und wenn die Phasendifferenz zwischen zwei Wellen konstant bleibt, spricht man von einer festen **Phasenbeziehung**. Wichtige Spezialfälle sind 0° Phasendifferenz (gleichphasig) und 180° (gegenphasig). Ein Winkel von 360° ist, wie immer, völlig gleichwertig zu einem Winkel von 0° , da eine Verschiebung um eine ganze Wellenlänge keinerlei Effekt hat, genauso wie eine Verschiebung um zwei Wellenlängen, also 720° , usw.

Polarisation des Lichts

Elektromagnetische Wellen bestehen aus miteinander gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern, die sich in Raum und Zeit verändern. Bei einer monochromatischen (nur eine Frequenz bzw. Wellenlänge) ebenen Welle im freien Raum stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander und beide stehen senkrecht auf der Richtung, in der das Licht sich ausbreitet. Wenn das elektrische Feld nur in einer Richtung hin und her schwingt, spricht man von einer **linear polarisierten** Welle. Wenn man in Richtung der Wellenausbreitung schaut, kann man zwei grundsätzlich verschiedene Polarisationen (Schwingungsrichtungen) unterscheiden: „rechts und links“ (x -Polarisation) und „auf und ab“ (y -Polarisation). Alle komplizierteren Wellenformen kann man aus diesen Grundformen zusammensetzen.

Schrödingergleichung Achtung: Enthält höhere Mathematik.

Die **zeitabhängige Schrödingergleichung** für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf der x -Achse bewegt, ist eine Differenzialgleichung in den Variablen x (Ort) und t (Zeit), aus der sich die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ergibt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t).$$

Am wichtigsten sind hier die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$, also die erste Ableitung nach der Zeit t und die zweite Ableitung nach dem Ort x . Immer wenn mehrere Variable im Spiel sind, bezeichnet man die Ableitungen nicht mit dem üblichen d , sondern mit ∂ , um daran zu denken, dass eben mehrere Variable im Spiel sind, von denen aber gerade nur eine betrachtet wird, während die anderen als konstant angesehen werden; man spricht von **partiellen** Ableitungen und die Schrödingergleichung ist eine

partielle Differenzialgleichung.

Die **imaginäre Einheit** i hat die Eigenschaft $i^2 = -1$. Sie ist eine **komplexe Zahl** mit Realteil Null und Imaginärteil Eins.

\hbar (lies: „h-quer“) ist die Planck-Konstante h , dividiert durch 2π , m ist die Masse des Teilchens.

$V(x)$ ist die potentielle Energie eines *klassischen* Teilchens am Ort x , die mit den auf das Teilchen wirkenden Kräften verknüpft ist; der Term mit der zweiten Ableitung nach dem Ort hat mit der kinetischen Energie des Teilchens zu tun.

Üblicherweise führt man eine Abkürzung für alle Operationen ein, die auf der rechten Seite der Schrödingergleichung stehen, also an der Wellenfunktion vorgenommen werden. Man schreibt

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

und nennt \hat{H} den **Hamilton-Operator**.

Der Hamilton-Operator enthält über die potentielle Energie die Kräfte, die auf das Teilchen wirken und definiert damit die physikalische Situation. Er bestimmt die zeitabhängige Schrödingergleichung als **Bewegungsgleichung** für die Wellenfunktion. Darüber hinaus bestimmt er auch die möglichen Energiewerte des Teilchens über die **zeitUNabhängige Schrödingergleichung**

$$\hat{H}\phi_i(x) = E_i\phi_i(x).$$

Die Energie E_i kann nur bestimmte Werte E_0, E_1, E_2, \dots annehmen, mit verschiedenen Wellenfunktionen $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ (lies: „Phi-Null von x , ...“). Eine solche Gleichung nennt man **Eigenwertgleichung**, die Zahlen E_i heißen **Eigenwerte** und die Funktionen $\phi_i(x)$ **Eigenfunktionen**. Die Eigenfunktionen $\phi_i(x)$ des Hamiltonoperators beschreiben die **stationären Zustände** des Teilchens, bei denen sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zeitlich nicht ändert.

Die hier auftretende mathematische Situation ist übrigens überhaupt nicht ungewöhnlich. Auch die Schwingungen einer Gitarrensaite werden durch eine partielle Differenzialgleichung beschrieben, und auch die Gitarrensaite kann nur in ganz bestimmten Formen schwingen, die ganz bestimmten Tönen (Frequenzen) entsprechen, dem Grundton und den Obertönen. Wenn statt dessen beliebige Frequenzen möglich wären, würde die Gitarre nicht mehr wie eine Gitarre klingen, sondern sehr schräg.

Spektrum (Plural: Spektren), Spektroskopie

Als **Spektrum** bezeichnet man die Gesamtheit der in einem Bereich zu beobachtenden Wellenlängen (oder Frequenzen) der elektromagnetischen Strahlung, zusammen mit ihren jeweiligen Intensitäten. Wenn in einem Be-

reich alle Wellenlängen auftreten können, bezeichnet man das Spektrum als **kontinuierlich**, z.B. bei der Wärmestrahlung eines heißen Objekts. Wenn nur ganz bestimmte Wellenlängen auftreten können, nennt man das Spektrum **diskret**. Das ist beispielsweise für reine chemische Elemente der Fall. Diskrete Spektren nennt man auch **Linienspektren**, benannt nach dem Bild von farbigen Linien auf dunklem Hintergrund, das sich in einem optischen Spektrometer zeigt. Durch Untersuchung solcher Linienspektren in der **Spektralanalyse** stellt man fest, welche chemischen Elemente die untersuchte Substanz enthält. Die Untersuchung von Spektren nennt man **Spektroskopie**.

Allgemeiner bezeichnet man auch die möglichen Werte der Energie eines Quantensystems als **Energiespektrum**.

Unschärferelation

Heisenbergs Unschärferelation, oft auch Unbestimmtheitsrelation oder Unbestimmtheitsbeziehung genannt, sagt aus, mit welcher Genauigkeit Δx der Ort x eines Teilchens bestimmt werden kann, das sich auf der x -Achse bewegt, wenn man im gleichen Zustand auch den Impuls p des Teilchens mit Genauigkeit Δp bestimmt:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Die „Unschärfen“ Δx und Δp hängen also miteinander zusammen: Wenn man x sehr genau bestimmen möchte, wird p sehr ungenau, und umgekehrt.

Nicht nur Ort und Impuls, sondern auch andere Paare von „unverträglichen“ Größen der Quantenmechanik sind durch Unbestimmtheitsbeziehungen verknüpft.

\hbar (lies: „h-quer“) ist die durch 2π dividierte Planck-Konstante;

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}.$$

Da diese Zahl so winzig ist, bemerken wir von der Unschärferelation im täglichen Leben nichts; die Atome spüren sie aber sehr deutlich.

Wellenfunktion Achtung: Enthält höhere Mathematik.

Die **Wellenfunktion** eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf der x -Achse bewegt, hängt ab vom Ort x und der Zeit t ; meist wird sie bezeichnet mit $\Psi(x, t)$ (lies: „Psi von x und t “).

$\Psi(x, t)$ ist eine *komplexe* Funktion, d.h. sie besteht aus zwei Teilen, $\text{Re}\Psi(x, t)$ und $\text{Im}\Psi(x, t)$ (lies: „Realteil von Psi und Imaginärteil von Psi“). Diese beiden Teile spielen eine ähnliche Rolle wie die Koordinaten x und y eines Punktes in einer Ebene, wo beispielsweise der Abstand r des Punktes (x, y)

vom Nullpunkt mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden kann:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Aus der Wellenfunktion ergibt sich auf ähnliche Weise die wichtige Größe

$$|\Psi(x, t)|^2 = (\operatorname{Re}\Psi(x, t))^2 + (\operatorname{Im}\Psi(x, t))^2$$

(lies: „Psi-Betragsquadrat“), die angibt, wie wahrscheinlich es ist, das Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden. (Präzise ausgedrückt, ist $|\Psi(x, t)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.)

Zustand eines Teilchens

Der Zustand eines klassischen Teilchens, das sich in x -Richtung bewegt, ist zur Zeit t festgelegt durch den Ort x und den Impuls p (oder auch die Geschwindigkeit v). Die Werte von x und p sind in jedem Augenblick genau bestimmt.

Der Zustand eines quantenmechanischen Teilchens ist dagegen festgelegt durch eine Funktion, die von x und t abhängt, die **Wellenfunktion**. Die Wellenfunktion erlaubt Aussagen über Ort und Impuls des Teilchens, aber nur im Rahmen der heisenbergschen Unschärferelation.

Eine andere Möglichkeit, einen quantenmechanischen Zustand mathematisch darzustellen, sind Vektoren. Mehr darüber findet sich im Abschnitt 5.1.

Anhang B

Liste der Versuche

- Beugung von Laserlicht (Abschnitte 2.3 und 2.5) Anleitung: ▷
- Detektion einzelner Photonen (Abschnitt 4.5) Anleitung: ▷
- Doppelspalt mit einzelnen Photonen (Abschnitt 2.5) Anleitung: ▷
- Elektronenbeugung (Abschnitt 2.5) Anleitung: ▷
- Franck-Hertz-Versuch (Abschnitt 3.1) Anleitung: ▷
- Mach-Zehnder-Interferometer (Abschnitt 2.5) Anleitung: ▷
- Millikan-Versuch (Abschnitt 4.3) Anleitung: ▷
- Photoeffekt (Abschnitt 4.2) Anleitung: ▷
- Polarisation des Lichtes (Abschnitt 3.2) Anleitung: ▷
- Quantenkryptographie (Im Aufbau; Abschnitt 6.3)
- Schwarzkörperstrahlung (Abschnitt 4.1) Anleitung: ▷
- Spektroskopie (Abschnitte 3.1 und 4.4) Anleitung: ▷
- Wellenwanne (Abschnitte 2.3 und 2.6) Anleitung: ▷

Wichtiger Hinweis:

Dies ist die Internetversion des Handbuchs zum *Treffpunkt Quantenmechanik*. Sie enthält nur den Überblicksteil in sechs Kapiteln.

Die detaillierten Anleitungen zu den einzelnen Versuchen im *Treffpunkt Quantenmechanik* können wir aus urheberrechtlichen Gründen nicht im Internet zugänglich machen.

Diese Anleitungen sind gesammelt nur in der gedruckten Version des Handbuchs oder als einzelne Ausdrücke in den Räumen des *Treffpunkts Quantenmechanik* leihweise für Interessierte verfügbar.